സ്റ്റാൻഡേർഡ് IX

ഗണിതം

ഭാഗം – 1

കേരളസർക്കാർ
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി, കേരളം
2019

NT-503-1-MATHS-9-M-VOL.1

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളെ,

അളവുകളിലൂടെയും അവയുടെ പരസ്പര ബന്ധങ്ങളിലൂടെയും ലോകത്തെ മനസ്സിലാക്കാനാണ് മനുഷ്യർ പലതരം സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കിയത്. ഇങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഭിന്നസംഖ്യകളും രൂപപ്പെടുന്നതും, അത്തരം അളവുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഭൗതിക സാഹചര്യങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് ഈ സംഖ്യകളുടെ ക്രിയകൾ നിർവചിക്കപ്പെടുന്നതെല്ലാം ഇതുവരെയുള്ള ഗണിതപഠനത്തിൽ കണ്ടു. എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ടോ ഭിന്നസംഖ്യകൾകൊണ്ടോ സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയാത്ത അളവുകളെയും അവ സൂചിപ്പിക്കാനുള്ള പുതിയ സംഖ്യകളെയും ഈ പുസ്തകത്തിൽ പരിചയപ്പെടാം.

ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളുടെ പഠനവും ഇതിൽ തുടരുന്നു. സമാന്തര വരകളും ത്രികോണങ്ങളും വൃത്തങ്ങളുമെല്ലാം തമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധങ്ങളാണ് പ്രധാനമായും ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. അവ തിരിച്ചറിയുന്നതിലൂടെ പുതിയ ജ്യാമിതീയ തത്വങ്ങളും പ്രയോഗങ്ങളും രൂപപ്പെടുന്നത് വിശദീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ചലനാത്മകമായി ജ്യാമിതി അവതരിപ്പിക്കാൻ ജിയോജിബ്ര എന്ന കമ്പ്യൂട്ടർ പ്രോഗ്രാം ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതിയും വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. കൂടുതൽ പഠനവിഭവങ്ങൾ സമഗ്രപോർട്ടൽ, ക്യൂ.ആർ. കോഡ് എന്നിവ മുഖേന ലഭ്യമാണ്.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. ജെ. പ്രസാദ്

ഡയറക്ടർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ – താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ്:

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയ സേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക. സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സംസ്കാരസമന്വയത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

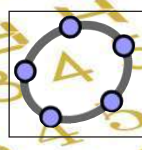
(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽകൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക.

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ തന്റെ സംരക്ഷണയിലുള്ള കുട്ടികൾക്കോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷാകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

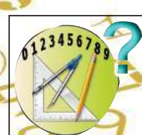
ഉള്ളടക്കം

ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.


ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത


കണക്ക് ചെയ്തുനോക്കാം


ഗവേഷണം



ചർച്ച ചെയ്യാം

പരപ്പളവ്

1

ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കണം. പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആയിരിക്കണം. എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

ഇങ്ങനെയാവാം:

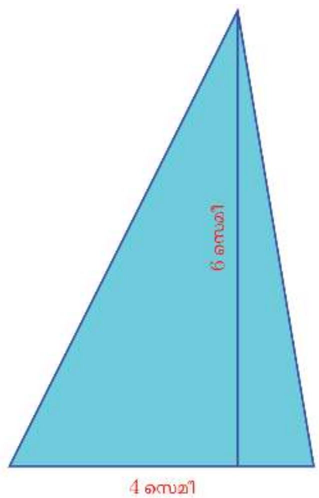
ഇങ്ങനെയുമാവാം:

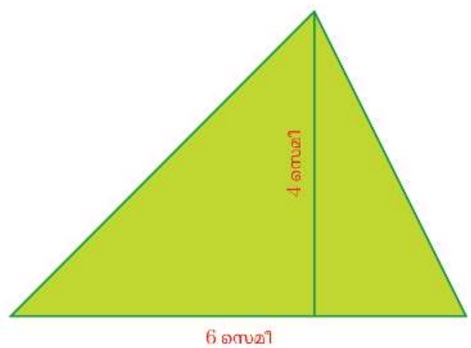
ഇനിയും പലതരത്തിലാകാം, അല്ലേ?

ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആകണം എന്നു കൂടി പറഞ്ഞാലോ? ഒരെണ്ണം മാത്രമല്ലേയുള്ളൂ?

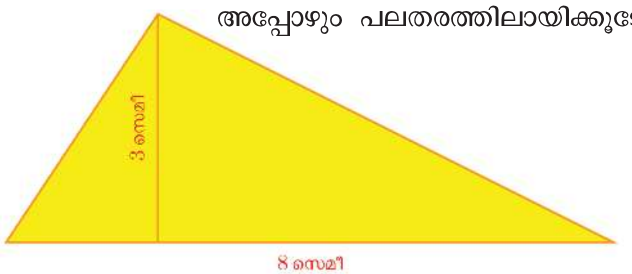
Min = 0, Max = 50 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a നിർമിക്കുക. നീളം a ആകത്തക്കവിധം ഒരു വര വരച്ച് അഗ്രബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി വരയ്ക്ക് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അഗ്രബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി കൊണ്ട് ആരം 12/a ആയ വൃത്തങ്ങൾ വരച്ച്, വൃത്തങ്ങളും ലംബങ്ങളും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ഉപയോഗിച്ച് ചതുരം പൂർത്തിയാക്കിയതിനുശേഷം വൃത്തങ്ങളും വരകളും മറച്ചു വയ്ക്കാം. ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡർ മാറ്റുമ്പോൾ പരപ്പളവ് 12 ആയ വ്യത്യസ്ത ചതുരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നത് കാണാം.

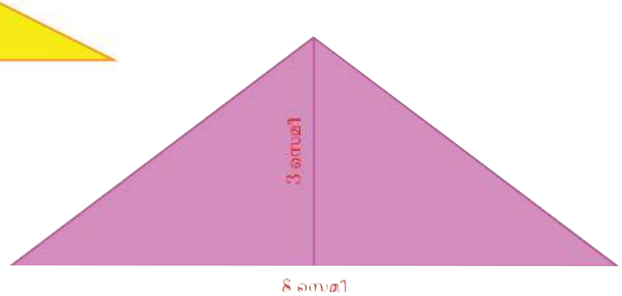
12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണമാണ് വേണ്ടതെങ്കിലോ? അതും പലതരത്തിലാവാം:

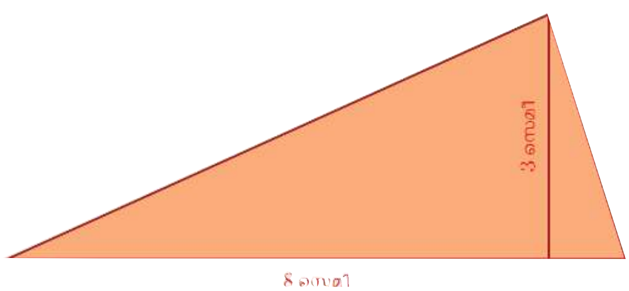




ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമെന്നുകൂടി പറഞ്ഞാലോ? അപ്പോഴും പലതരത്തിലായിക്കൂടേ?



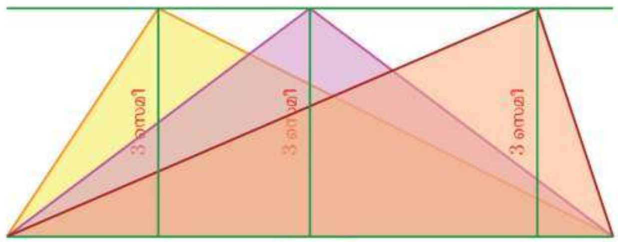




Min = 0, Max = 5 ആകത്തക്ക വിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a നിർമിക്കുക. നീളം a ആകത്തക്ക വിധം ഒരു വര AB നിർമിച്ച് A യിൽകൂടി ഈ വരയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക. A കേന്ദ്രമായി ആരം 24/a ആയ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് വൃത്തവും ലംബവും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. C യിൽ കൂടി AB യ്ക്ക് സമാന്തരമായ ഒരു വര വരച്ച് അതിൽ ഒരു ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണം ABD നിർമിച്ച് പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വിലയും, D എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനവും മാറ്റിയാൽ പരപ്പളവ് 12 ആയ വ്യത്യസ്ത ത്രികോണങ്ങൾ ലഭിക്കും. a യുടെ വില 8 ആക്കിയതിനു ശേഷം D മാത്രം മാറ്റിയാൽ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 8 ഉം പരപ്പളവ് 12 ഉം ആയ വ്യത്യസ്ത ത്രികോണങ്ങൾ ലഭിക്കും.

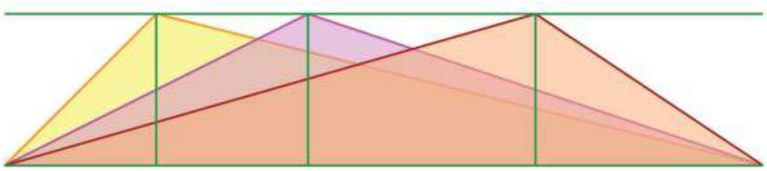
ഇവയുടെയെല്ലാം പാദം ഒഴികെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം മാറിയിട്ടുണ്ട്; പാദവും ഉയരവും മാറാത്തതിനാൽ പരപ്പളവ് മാറിയിട്ടുമില്ല.

ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മേൽമൂല, പാദത്തിൽ നിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരത്തിലാണ്. ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിൽപ്പറയാം: മേൽമൂലകളെല്ലാം പാദത്തിനു സമാന്തരമായി, 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിലുള്ള വരയിലാണ്.



ഇതേ പാദവും പരപ്പളവുമുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മേൽമൂല ഈ വരയിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കണമല്ലോ; മറിച്ച്, ഈ വരയിലെ ഏത് ബിന്ദു എടുത്ത്, താഴത്തെ വരയുടെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ചാലും ഇതേ പാദവും പരപ്പളവുമുള്ള ത്രികോണം കിട്ടും.

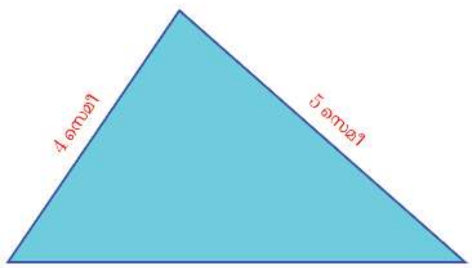
പാദവും പരപ്പളവും മാറ്റിയാലും ഇപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം ശരിയല്ലേ?



ഒരേ പാദവും പരപ്പളവുമുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മൂന്നാം മൂല, പാദത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലാണ്; മറിച്ച്, ഒരേ പാദവും മൂന്നാം മൂലകളെല്ലാം പാദത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലുമായ ത്രികോണങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ പരപ്പളവാണ്.

ഇത് എങ്ങനെയെല്ലാം ഉപയോഗിക്കാമെന്നു നോക്കാം.

വശങ്ങളുടെ നീളം 4, 5, 6 സെന്റിമീറ്ററായി ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

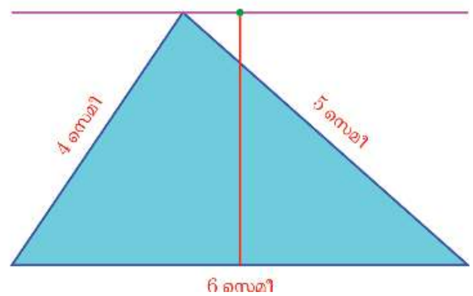


ഇനി താഴത്തെ വശം ഇതുതന്നെയായി, ഇതേ പരപ്പുള്ള സമപാർശ്വത്രികോണം വരയ്ക്കണം:

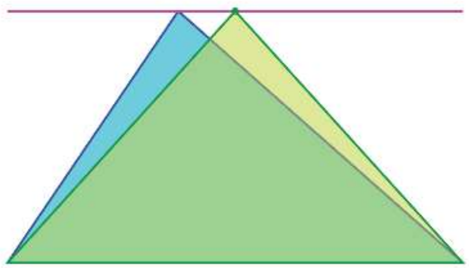
വരയ്ക്കേണ്ട ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം മാറാത്തതിനാൽ, മേൽമൂല എവിടെയെടുക്കണം എന്നു മാത്രം തീരുമാനിച്ചാൽ മതി. പരപ്പളവ് മാറാതിരിക്കാൻ, അത് താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി ഇപ്പോഴുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂലയിലൂടെയുള്ള വരയിലായിരിക്കണം.

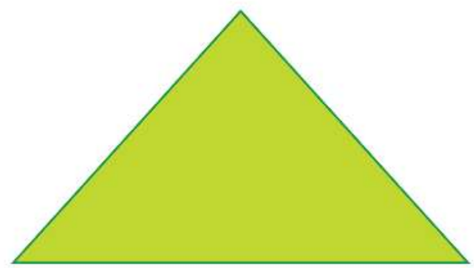
സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മേൽമൂല പാദത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയിലായിരിക്കുമെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടതല്ലേ?

അപ്പോൾ ഈ വരച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂലയിലൂടെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായ വരയും, താഴത്തെ വശത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയും മുട്ടുന്ന ബിന്ദുവാണ് നമുക്കു വേണ്ട മൂന്നാംമൂല:



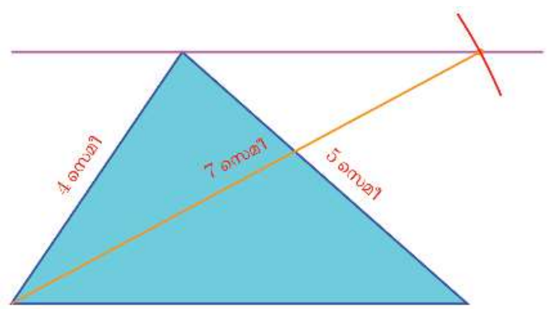
ഇനി ത്രികോണം വരയ്ക്കാമല്ലോ:



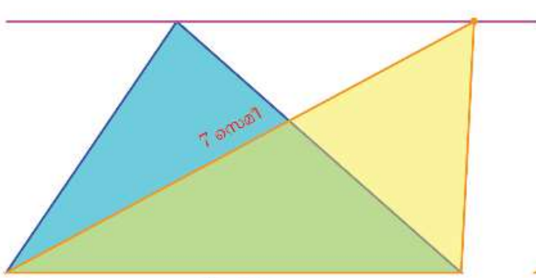


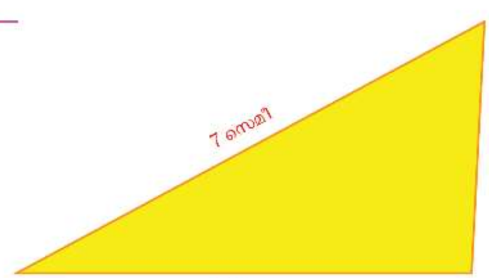
ഇനി ഇതേ പരപ്പുള്ള മറ്റൊരു ത്രികോണം, താഴത്തെ വശം ഇതുതന്നെയും, ഇടതുവശം 7 സെന്റിമീറ്ററുമായി വരയ്ക്കാമോ?

ഇടതുമൂലയിൽ നിന്ന്, 7 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തഭാഗം വരച്ച്, മുകളിലെ വരയെ മുറിക്കുന്ന സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിച്ചാൽപ്പോരേ?



അപ്പോൾ ത്രികോണം ഇങ്ങനെയാകും:

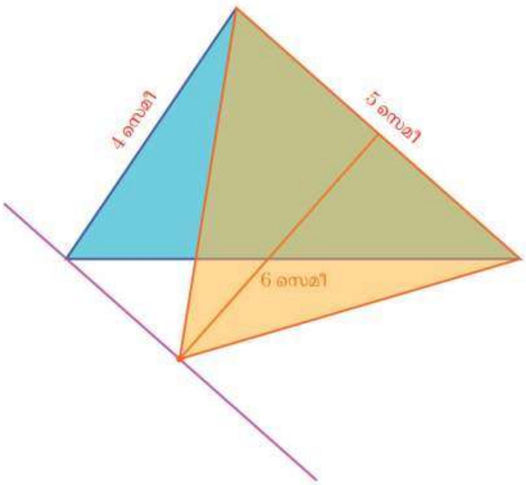


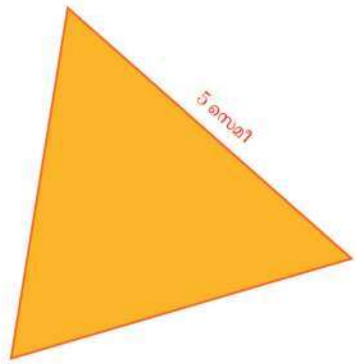


ഇതേ പരപ്പുള്ള സമപാർശ്വത്രികോണം, പാദം 5 സെന്റിമീറ്ററായി വരയ്ക്കണമെങ്കിലോ?

താഴത്തെ വശം 5 സെന്റിമീറ്ററായി ആദ്യത്തെ ചിത്രം മാറ്റിവരച്ച്, മുമ്പു ചെയ്ത തുപോലെ വരയ്ക്കാം.

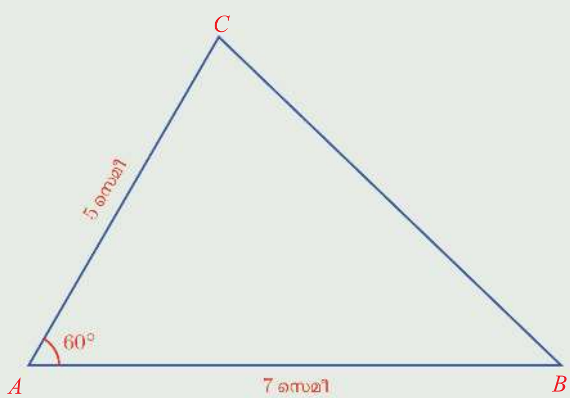
അൽപം ചരിഞ്ഞ ത്രികോണമായാലും മതിയെങ്കിൽ, ഇതേ ചിത്രത്തിൽത്തന്നെ ഇടതുമൂലയിലൂടെ വലതു വശത്തിനു സമാന്തരവര വരച്ചും ചെയ്യാം:





(1) വശങ്ങളുടെ നീളം 3, 4, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പളവുള്ള മൂന്നു വ്യത്യസ്ത മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

(2) ചുവടെ കാണുന്ന ത്രികോണം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.



ഇതേ പരപ്പുള്ള *ABP, BCQ, CAR* എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ വരയ്ക്കുക.

i) $\angle BAP = 90^\circ$

ii) $\angle BCQ = 60^\circ$

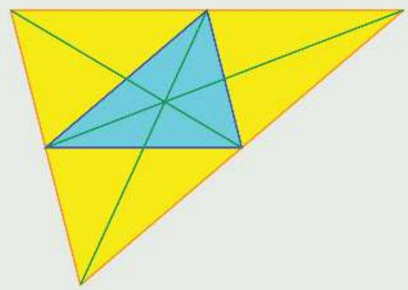
iii) $\angle ACR = 30^\circ$

(3) ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, അതിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും വൃത്തകേന്ദ്രവും മൂലകളായി ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പുള്ള മറ്റൊരു ത്രികോണം, എല്ലാ മൂലകളും വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയായി വരയ്ക്കുക.

(4) രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 8, 6 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററും, ആയ (തുല്യമല്ലാത്ത) എത്ര ത്രികോണം വരയ്ക്കാം? പരപ്പളവ് 24 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ?

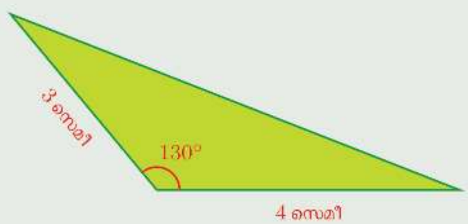
നീളം 4 ആയ ഒരു വര AB വരയ്ക്കുക. A കേന്ദ്രമായി ആരം 3 ആയ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഒരു Angle slider α നിർമിച്ച് $\angle BAB' = \alpha$ ആകത്തക്കവിധം AB′ എന്ന വര വരയ്ക്കുക. (Angle with given size ഉപയോഗിച്ച് B, A എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി α എന്ന് നൽകിയാൽ B′ എന്ന ബിന്ദു ലഭിക്കും). AB′ എന്ന വരയും വൃത്തവും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. C യിൽക്കൂടി AB യ്ക്ക് സമാന്തര വര വരച്ച് വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. ABC, ABD എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. $\angle BAC$, $\angle BAD$ എന്നീ കോണളവുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? കോണളവ് മാറ്റി നോക്കൂ.

(5) ചിത്രത്തിലെ നീല ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിനും എതിർമൂലയിലൂടെ സമാന്തരവര വരച്ചാണ് വലിയ ത്രികോണം ഉണ്ടായിരിക്കുന്നത്:



ചിത്രത്തിൽ നീല ത്രികോണത്തിന്റെ അതേ പരപ്പളവുള്ള വേറെ എത്ര ത്രികോണങ്ങളുണ്ട്? അവയിൽ, എല്ലാ അളവുകളും നീല ത്രികോണത്തിന്റേതുതന്നെയായ എത്രയെണ്ണമുണ്ട്?

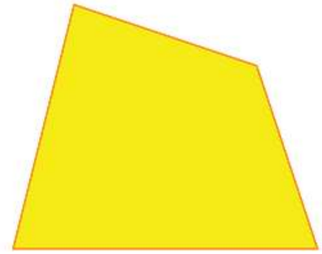
(6) ചിത്രത്തിലെ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകൾ തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.



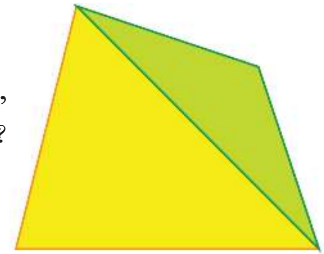
രണ്ട് വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ മാറാതെ ഒരേ പരപ്പളവുള്ള എത്ര വ്യത്യസ്ത ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം?

ചതുർഭുജവും ത്രികോണവും

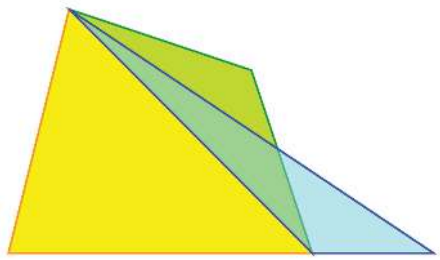
സവിശേഷതകളൊന്നുമില്ലാത്ത ഒരു സാധാരണ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെയാണ്?



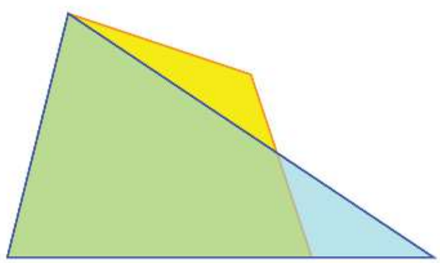
ഒരു വികർണം വരച്ചു രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക, അല്ലേ?



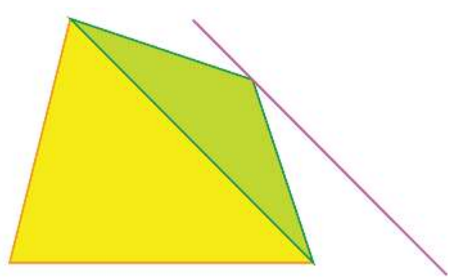
മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. പാദവും പരപ്പളവും മാറാതെ പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു മുകളിലെ മൂല ചതുർഭുജത്തിന്റെ പാദത്തിലെത്തിച്ചാലോ?



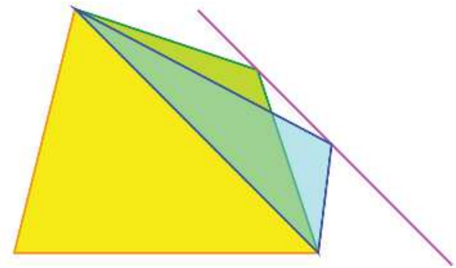
അപ്പോൾ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, മഞ്ഞയും നീലയും ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണല്ലോ. ഇവ ചേർന്ന രൂപമാകട്ടെ, വലിയൊരു ത്രികോണവും. അങ്ങനെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ഒറ്റ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവായി മാറ്റാം:



ഇനി ഈ ആഗ്രഹം സാധിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ പാദവും പരപ്പളവും മാറാതെ മൂല മാറ്റാൻ, ആ മൂലയിലൂടെ എതിർവശത്തിന് സമാന്തരവര വരച്ചാൽപ്പോരേ?

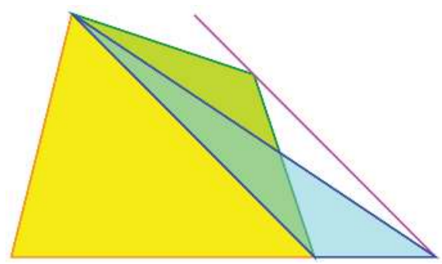


പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു മുകൾ മൂല ഈ വരയിലൂടെ എത്ര നീക്കിയാലും പരപ്പളവ് മാറില്ല. അതുകൊണ്ടു തന്നെ അങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന പുതിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് മാറുന്നില്ല.

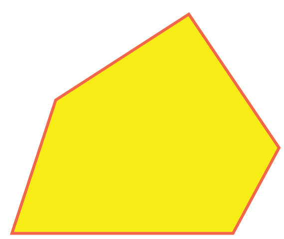


ത്രികോണമൂല, സമാന്തരവരയും ചതുർഭുജത്തിന്റെ പാദം നീട്ടിയതും തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന സ്ഥാനത്തെത്തിച്ചാലോ?

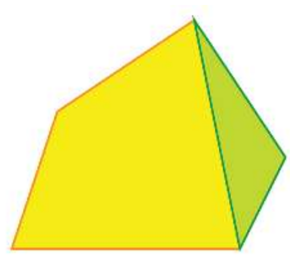
ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണമായില്ലേ?



ഈ സൂത്രം ആവർത്തിച്ചുപയോഗിച്ച്, ഏതു ബഹുഭുജത്തിനും അതേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണമുണ്ടാക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഈ പഞ്ചഭുജം നോക്കൂ.



ഒന്നിടവിട്ട രണ്ടു മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ച് ഇതിനെ ഒരു ചതുർഭുജവും ത്രികോണവുമാക്കി ഭാഗിക്കാം:



മുറിച്ചുമാറ്റലും തിരിച്ചടുക്കലും

കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത ഒരു രൂപത്തിനെ കഷണങ്ങളാക്കി മറ്റൊരു രൂപമാക്കി അടുക്കിയാൽ പരപ്പളവു മാറുന്നില്ല. പരപ്പളവു മാറാതെ രൂപം മാറ്റുന്ന ഒരു രീതിയിൽ നിന്ന്, മുറിച്ചു ചേർത്തു വയ്ക്കുന്ന ഒരു രീതി എപ്പോഴും കിട്ടണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, ചതുർഭുജത്തെ പരപ്പളവു മാറാതെ ത്രികോണമാക്കി വരയ്ക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ച്, കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത ഒരു ചതുർഭുജത്തെ മുറിച്ചടുക്കി ത്രികോണമാക്കാൻ കഴിയില്ല.

ഇങ്ങനെ മുറിച്ചെടുക്കുന്ന രീതികൾ വിശദീകരിക്കുന്ന പല വെബ്സൈറ്റുകളുടേയും വിവരങ്ങൾ

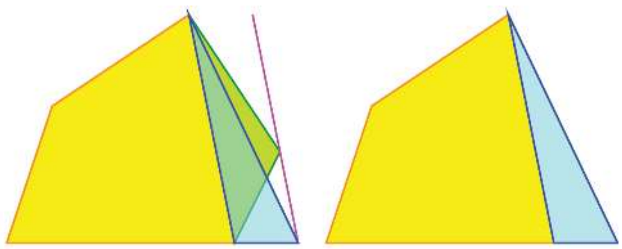
www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book/webdiss.html

എന്ന വെബ്പേജിലുണ്ട്.

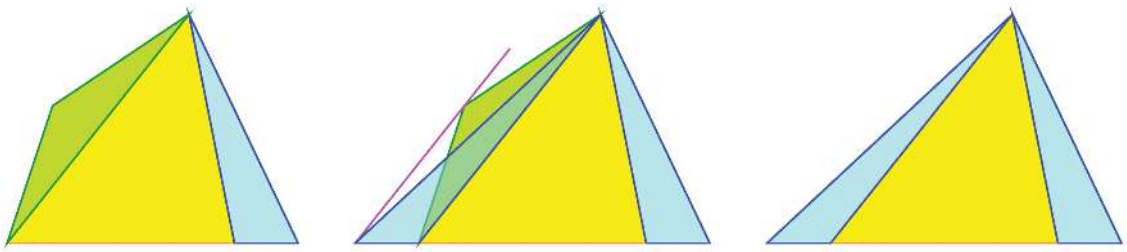
6TL6LA

ജിയോജിബ്രയിൽ ചതുർഭുജം, പഞ്ചഭുജം, ഷഡ്ഭുജം തുടങ്ങിയ രൂപങ്ങൾ വരച്ച് അവയ്ക്ക് തുല്യ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ നിർമിക്കുക.

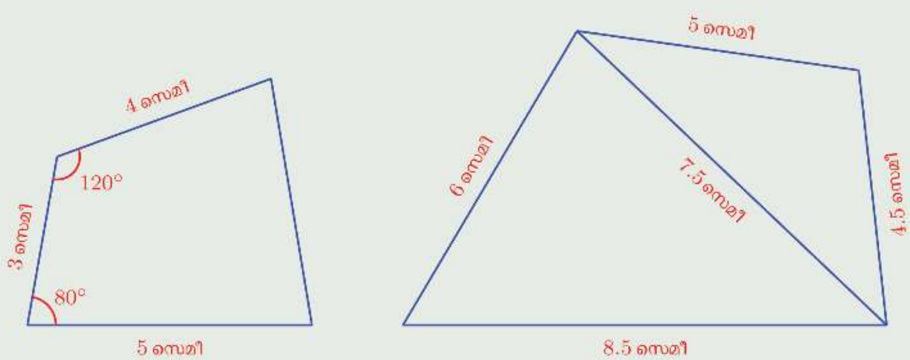
ഇനി പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു മുകൾ മൂല എതിർവശത്തിനു സമാന്തരമായി നീക്കി പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ പാദത്തിലെത്തിച്ചാൽ, പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ അതേ പരപ്പളവുള്ള ചതുർഭുജമായി:



ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഇടതു മുകൾ മൂലയും ഇതുപോലെ താഴ്ത്തിയാൽ ഇതേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണമാകും:



(1) ചുവടെയുള്ള രണ്ടു ചതുർഭുജങ്ങളും നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക. അവയുടെ അതേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണങ്ങളും വരച്ച്, പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക. (അതിനാവശ്യമായ നീളങ്ങൾ അളന്നെടുക്കണം)

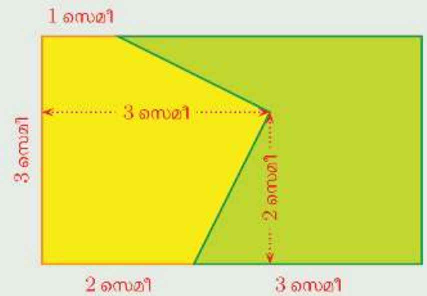


(2) ഒരു വശം 6 സെന്റിമീറ്ററും ഒരു കോൺ 60° യുമായ സമഭുജ സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവിനു തുല്യ പരപ്പളവുള്ള മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(3) ഒരു സമപഞ്ചഭുജം വരച്ച്, അതേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

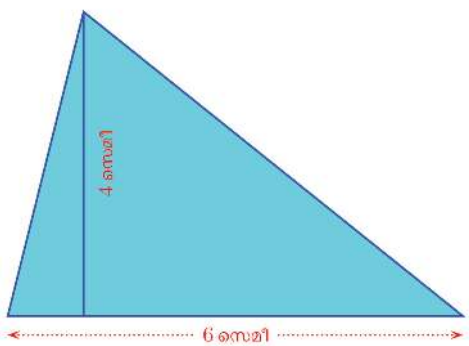
(4) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ചതുരത്തിനെ രണ്ടായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

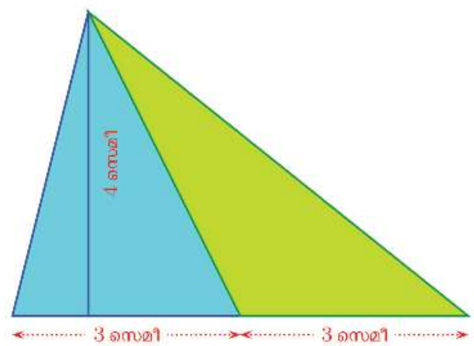
ഈ ഭാഗങ്ങളെ വേർതിരിക്കുന്ന ഒടിഞ്ഞ വരയ്ക്കു പകരം ഒരു നേർവര വരച്ച്, ചതുരത്തിനെ ഇതേ പരപ്പളവുള്ള മറ്റു രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുക. ഈ ഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



ത്രികോണഭാഗം

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.





ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയും, എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, അതിനെ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളാക്കുന്നു.

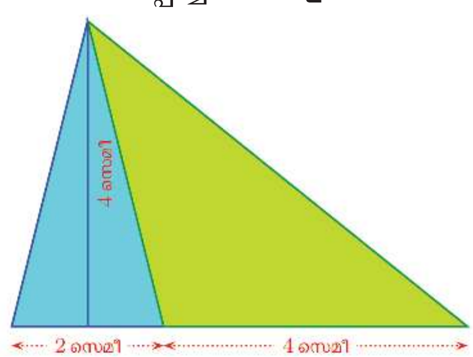
ഈ ഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?

രണ്ടിന്റെയും പാദം 3 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

ഉയരമോ? രണ്ടിനും 4 സെന്റിമീറ്റർതന്നെയല്ലേ?

അപ്പോൾ രണ്ടിന്റെയും പരപ്പളവും ഒന്നുതന്നെ: 6 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി മുകളിലെ മൂല താഴത്തെ വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിനു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ? ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രം നോക്കുക.



ഇപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 4 ഉം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 8 ഉം ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററായി.

അതായത്, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. താഴത്തെ വശത്തിനെ മുറിച്ചിരിക്കുന്നതും ഇതേ കണക്കിലല്ലേ? ചെറിയ കഷണത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് വലിയ കഷണത്തിന്റെ നീളം.

ഇക്കാര്യം അംശബന്ധമായി പറഞ്ഞാലോ?

താഴത്തെ വശത്തെ മുറിച്ചിരിക്കുന്നത് $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ; ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നതും അതേ അംശബന്ധത്തിൽ.

മുകളിലെ മൂലയിൽ നിന്നുള്ള വര, താഴത്തെ വശത്തിനെ എങ്ങനെ ഭാഗിച്ചാലും ഇതു ശരിയാകുമോ? $2 : 3$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നതെങ്കിലോ?

നീളങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാകും:

ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം $6 \times \frac{2}{5}$ സെന്റിമീറ്റർ

വലിയ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം $6 \times \frac{3}{5}$ സെന്റിമീറ്റർ

പരപ്പളവുകൾ ഇങ്ങനെയും:

ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $6 \times \frac{2}{5} \times 2 = 12 \times \frac{2}{5}$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ

വലിയ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $6 \times \frac{3}{5} \times 2 = 12 \times \frac{3}{5}$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ

അതായത്, മുകളിൽ നിന്നുള്ള വര, മുഴുവൻ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവായ 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററിനെ $2 : 3$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽത്തന്നെയാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്.

നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധം ഏതായാലും, അത് പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണെന്നു കാണാമല്ലോ. ത്രികോണത്തിന്റെ അളവുകൾ മാറിയാലും ഇപ്പറഞ്ഞതിന് മാറ്റമില്ല.

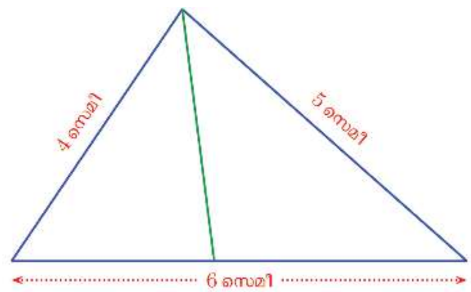
ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഏതു മൂലയിൽ നിന്നും എതിർവശത്തേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ഒരു വര, ഈ വശത്തിന്റെ നീളത്തെയും, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെയും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്.

ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽ നിന്നു വരയ്ക്കുന്ന എതിർവശത്തിന്റെ സമഭാജി, ത്രികോണത്തെയും സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു എന്നു കണ്ടു. അപ്പോൾ

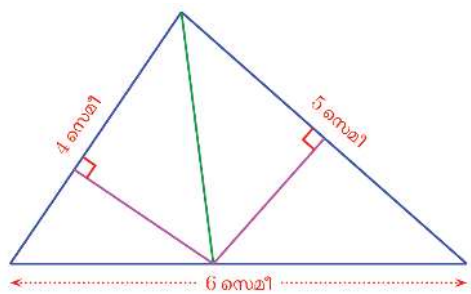
വേറൊരു ചോദ്യമാകാം: ഒരു മൂലയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജി, എതിർ വശത്തെ (ത്രികോണത്തെയും) ഏത് അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്?

ചിത്രത്തിൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ മൂലയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജി വരച്ചിരിക്കുന്നു.

താഴത്തെ വശത്തിനെ കോൺസമഭാജി മുറിക്കുന്ന അംശബന്ധമാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്.



ഇവിടെ ത്രികോണഭാഗങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും ഒരു വശം അറിയാം. അപ്പോൾ ഈ വശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇവയുടെ പരപ്പളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. അതിന് എതിർമൂലയിൽ നിന്ന് ലംബം വരയ്ക്കണം. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലും, അറിയാവുന്ന വശത്തിന്റെ എതിർ മൂല ഒരേ ബിന്ദുവാണല്ലോ.



ഈ ലംബങ്ങൾ കണ്ടിട്ട് ഒരേ നീളമാണെന്നു തോന്നുന്നില്ലേ? അതു ശരിയാണോ എന്ന് നോക്കാം. ചിത്രത്തിൽ മുകൾ ഭാഗത്ത് ഇടതും വലതുമുള്ള മട്ടത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കർണമാണ്. ഈ കർണം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ കോണിന്റെ സമഭാജി ആയതിനാൽ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ മുകളിലെ രണ്ട് കോണുകളും തുല്യമാണ്; മട്ടത്രികോണമായതിനാൽ കർണത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റത്തുള്ള കോണുകളും തുല്യം തന്നെ. അപ്പോൾ ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളും തുല്യമാകണമല്ലോ. അതായത്, നമ്മൾ വരച്ച ലംബങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.

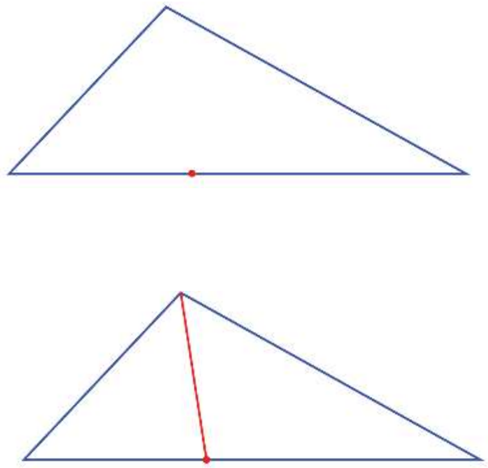
അപ്പോൾ ത്രികോണഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ, 4 നെയും 5 നെയും ഈ നീളത്തിന്റെ പകുതികൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ്; അതായത്, അവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $4 : 5$.

നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, കോൺസമഭാജി എതിർവശത്തിന്റെ നീളത്തെ ഭാഗിക്കുന്നതും ഇതേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായാലും, ഇതു ശരിയാകും.

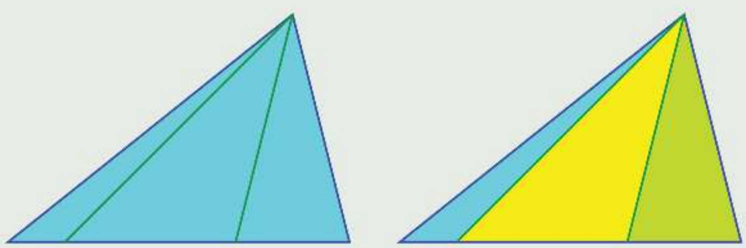
ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഏതു കോണിന്റെയും സമഭാജി എതിർ വശത്തെ ഭാഗിക്കുന്നത്, കോണിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിൽപ്പറയാം:



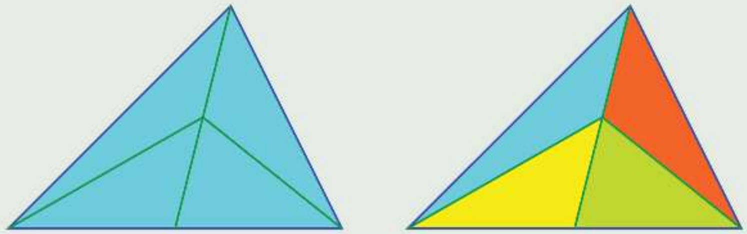
ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്ത് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ബിന്ദു, ആ വശത്തിനെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്. ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, മുകളിലത്തെ കോണിന്റെ സമഭാജി ഈ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകണം. അതായത്, മേൽമൂലയും ഈ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയാണ് മേൽക്കോണിന്റെ സമഭാജി.

(1) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മുകൾ മൂലയിൽ നിന്ന് താഴത്തെ വശത്തിലേക്ക് രണ്ടു വരകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.



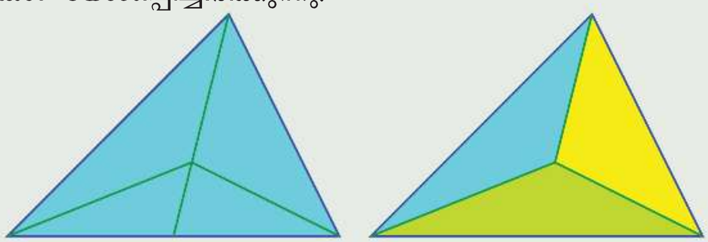
വരകൾ താഴത്തെ വരയുടെ നീളത്തെ ഭാഗിക്കുന്ന അംശബന്ധവും, ചിത്രത്തിലെ മൂന്നു ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവിന്റെ അംശബന്ധവും ഒന്നു തന്നെയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ മൂലയും താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ച ശേഷം, ഈ വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവുമായി മറ്റു രണ്ടു മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന നാലു ത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ നാലിലൊന്നാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

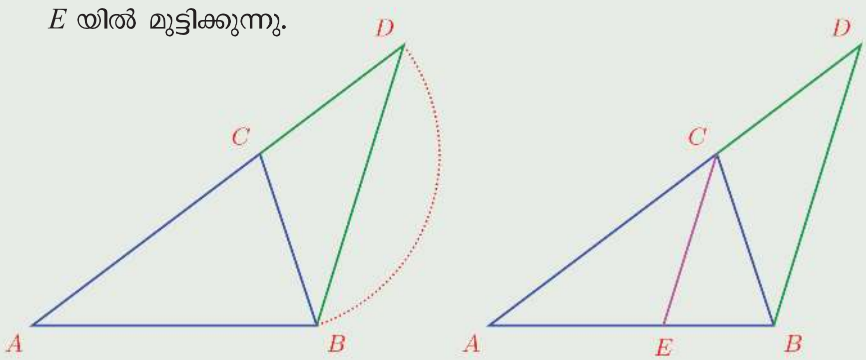
(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ മൂലയും താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ചശേഷം, ഈ വരയെ $2:1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവുമായി മറ്റു രണ്ടു മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെ മൂന്നു ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും കോണിന്റെ വശങ്ങളിലേക്കുള്ള ലംബദൂരങ്ങൾ തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(5) ചിത്രത്തിൽ ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ AC എന്ന വശം, CB എന്ന വശത്തിന്റെ നീളവും ചേർത്ത് D യിലേയ്ക്ക് നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. തുടർന്ന്, DB യ്ക്ക് സമാന്തരമായി C യിൽക്കൂടി വര വരച്ച്, AB യിലെ E യിൽ മുട്ടിക്കുന്നു.

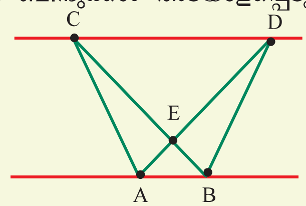


i) CE എന്ന വര, $\angle C$ യെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നുവെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) ഇതുപയോഗിച്ച്, 8 സെന്റീമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയെ 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

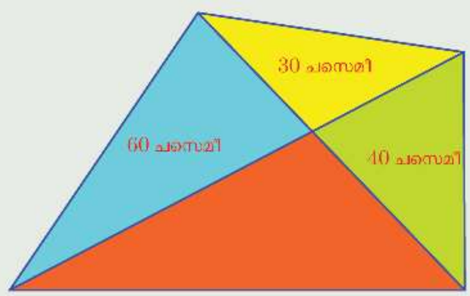
iii) 8 സെന്റീമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കാൻ ഇതു പയോഗിക്കാൻ കഴിയുമോ? എങ്ങനെ?

രണ്ട് സമാന്തരവരകൾ വരച്ച്, A, B, C, D എന്നിങ്ങനെ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.



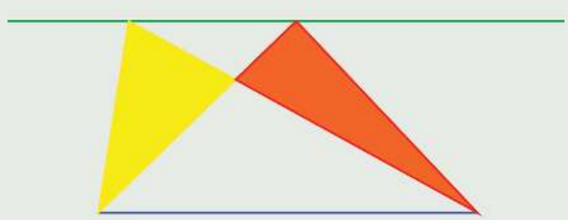
AD, BC എന്നീ വരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. AEC, BED എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് പരപ്പളവ് കാണുക. പരപ്പളവുകൾക്ക് എന്താണ് ബന്ധം? ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

(6) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ അതിനെ നാലു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു. മൂന്നു ഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്:

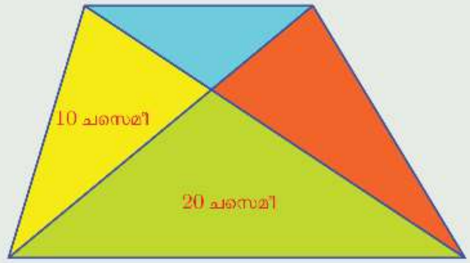


ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(7) ചിത്രത്തിൽ താഴെയും മുകളിലും വിലങ്ങനെയുള്ള വരകൾ സമാന്തരമാണ്. മഞ്ഞയും ചുവപ്പും ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

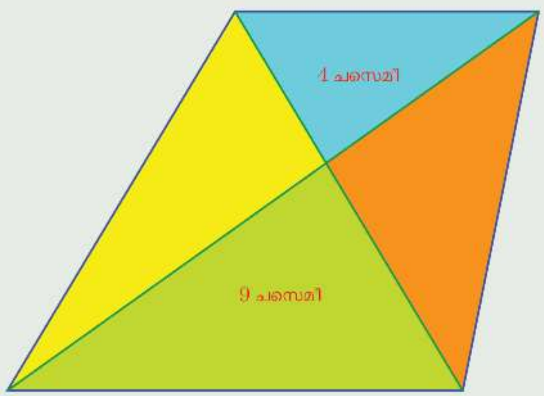


(8) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ലംബകത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ അതിനെ നാലു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു.

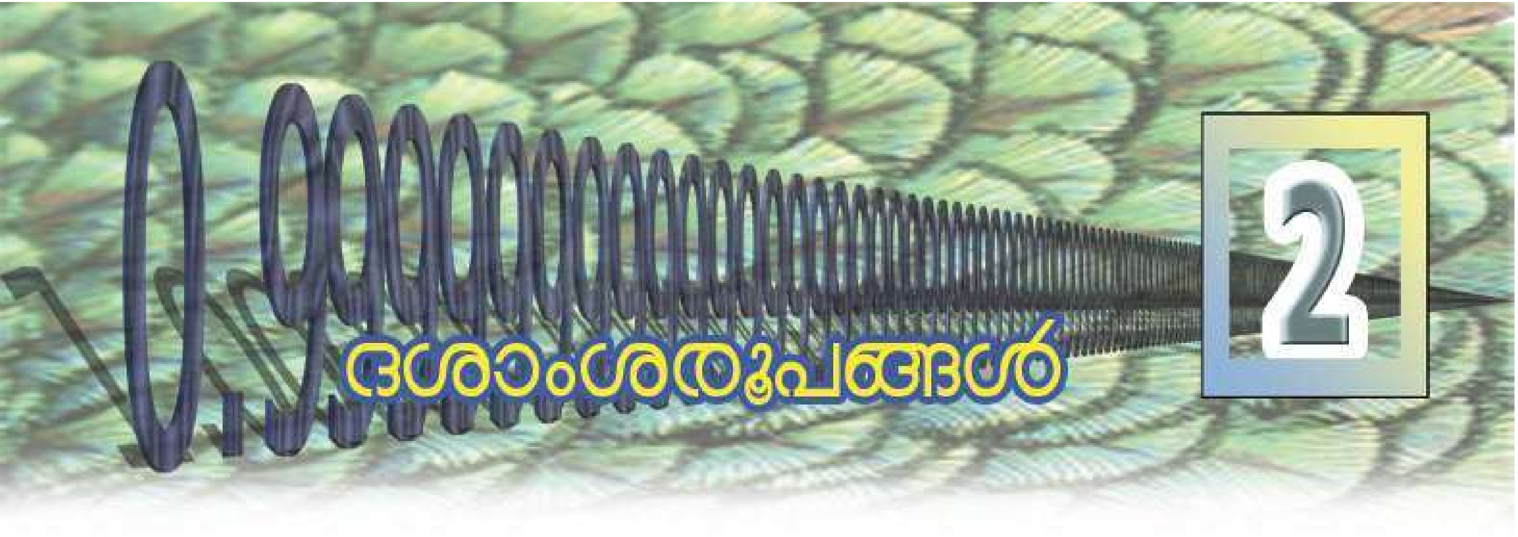


മഞ്ഞ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 10 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 20 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ലംബകത്തിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(9) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ലംബകത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ അതിനെ നാലു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു:



നീല ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 4 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും, പച്ചത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 9 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ലംബകത്തിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവെത്രയാണ്?



2 ദശാംശരൂപങ്ങൾ

ആദ്യരൂപങ്ങൾ

ചില ഭിന്നസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം ദശാംശരൂപങ്ങൾ ആറാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{3}{10} = 0.3$$

$$\frac{29}{100} = 0.29$$

$$\frac{347}{1000} = 0.347$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം.

മറിച്ച്, ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതിയ സംഖ്യകളെ 10 ന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതി ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാം.

ഉദാഹരണമായി

$$0.7 = \frac{7}{10}$$

$$0.91 = \frac{91}{100}$$

$$0.673 = \frac{673}{1000}$$

ഇവയെ $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$ എന്നിങ്ങനെ 10 ന്റെ കൃതികളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾ സ്ഥാനവിലകളായി ഉപയോഗിച്ച് പിരിച്ചെഴുതാമെന്നും അറിയാമല്ലോ.

$$0.91 = \frac{91}{100} = \frac{90}{100} + \frac{1}{100} = \frac{9}{10} + \frac{1}{100}$$

$$0.671 = \frac{671}{1000} = \frac{600}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{1000}$$

അപ്പോൾ 0.03 എന്നെഴുതുന്നതിന്റെ അർഥമെന്താണ്?

ദശാംശഭിന്നങ്ങൾ

എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 1, 10, 100, 1000, ... എന്നിവ ഉപയോഗിച്ചാണല്ലോ എഴുതുന്നത്. ഉദാഹരണമായി,

$$(3 \times 100) + (5 \times 10) + 1$$

എന്നതിന്റെ ചുരുക്കമാണ് 351.

ഇങ്ങനെ എഴുതിയാൽ ക്രിയകൾ എളുപ്പം ചെയ്യാം. (25 നെ XXV എന്നും 13 നെ XIII എന്നും എഴുതി ഗുണിക്കാൻ ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ).

ഇതുപോലെ ഭിന്നസംഖ്യകളെ

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$$

എന്നിങ്ങനെ 10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് പിരിച്ചെഴുതാമോ എന്ന് ആദ്യം ആലോചിച്ചത് ഡച്ചുകാരനായ ഷിമൺ സ്റ്റെവിൻ ആണ്, ഇത് പതിനാറാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ്. ഇത് ക്രിയാരീതികൾ എളുപ്പമാക്കും എന്നാണ് അദ്ദേഹം പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}$$

എന്നു കണക്കാക്കുന്നതിനേക്കാൾ എളുപ്പം

$$0.75 + 0.40 = 1.15$$

എന്നു ചെയ്യുന്നതാണല്ലോ.

$$0.03 = \frac{0}{10} + \frac{3}{100} = \frac{3}{100}$$

0.0203 ആയാലോ?

$$0.0203 = \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{3}{10000} = \frac{200}{10000} + \frac{3}{10000} = \frac{203}{10000}$$

ചില ഭിന്നങ്ങളുടെ ഛേദം 10 ന്റെ കൃതിയല്ലെങ്കിലും, അത്തരത്തിലുള്ള രൂപത്തിൽ മാറ്റിയെഴുതാം, ഉദാഹരണമായി, $10 = 2 \times 5$ ആയതിനാൽ

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0.2$$

എന്നും തുടർന്ന്

$$\frac{2}{5} = \frac{2\times2}{5\times2} = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3\times2}{5\times2} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4\times2}{5\times2} = \frac{8}{10} = 0.8$$

എന്നുമെല്ലാം എഴുതാം.

2 ഉം 5 ഉം 10 ന്റെ ഘടകങ്ങളായതുകൊണ്ടാണല്ലോ ഇതു സാധിച്ചത്. അപ്പോൾ $\frac{1}{4}$ നെ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതെങ്ങനെ?

4 എന്ന സംഖ്യ 10 ന്റെ ഘടകമല്ലെങ്കിലും, 100 ന്റെ ഘടകമാണല്ലോ. $4 \times 25 = 100$. ഇതുപയോഗിച്ച്

$$\frac{1}{4} = \frac{1\times25}{4\times25} = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3\times25}{4\times25} = \frac{75}{100} = 0.75$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം.

കൂടാതെ

$$\frac{1}{25} = \frac{1\times4}{25\times4} = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$\frac{2}{25} = \frac{2\times4}{25\times4} = \frac{8}{100} = 0.08$$

$$\frac{13}{25} = \frac{13\times4}{25\times4} = \frac{52}{100} = 0.52$$

എന്നും കണക്കാക്കാം.

ഇനി $\frac{1}{8}$ ആയാലോ?

8 എന്ന സംഖ്യ 10 ന്റെയോ, 100 ന്റെയോ ഘടകമല്ല.

പക്ഷേ $8 = 2 \times 2 \times 2$ ആയതിനാൽ, മൂന്നു തവണ 5 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ, മൂന്നു 10 കളുടെ ഗുണിതമാകില്ലേ?

കണക്കു ഭാഷയിൽ,

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1000$$

അതായത്,

$$8 \times 125 = 1000$$

ഇതുപയോഗിച്ച്

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \times 125}{8 \times 125} = \frac{125}{1000} = 0.125$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 125}{8 \times 125} = \frac{375}{1000} = 0.375$$

എന്നും

$$\frac{1}{125} = \frac{1 \times 8}{125 \times 8} = \frac{8}{1000} = 0.008$$

$$\frac{3}{125} = \frac{3 \times 8}{125 \times 8} = \frac{24}{1000} = 0.024$$

$$\frac{13}{125} = \frac{13 \times 8}{125 \times 8} = \frac{104}{1000} = 0.104$$

എന്നുമെല്ലാം എഴുതാമല്ലോ?

ഇനി $\frac{3}{160}$ ആയാലോ?

ആദ്യം ഛേദത്തിനെ ഘടകങ്ങളാക്കാം

$$160 = 32 \times 5 = 2^5 \times 5$$

ഇതിനെ ഗുണിച്ച്, 10 ന്റെ ഏതു കൃതിയാക്കാം?

അതിന് ഏതു സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കണം?

$$160 \times 5^4 = (2^5 \times 5) \times 5^4 = 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$$

അപ്പോൾ

$$\frac{3}{160} = \frac{3 \times 5^4}{160 \times 5^4} = \frac{3 \times 625}{100000} = \frac{1875}{100000} = 0.01875$$

പൊതുവെ ഏതുതരം ഭിന്നസംഖ്യകളെയാണ് ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയുന്നതെന്ന് ഇനി പറയാമോ?

(1) ചുവടെയുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകളെ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതുക.

(i) $\frac{3}{20}$ (ii) $\frac{3}{40}$ (iii) $\frac{13}{40}$

(iv) $\frac{7}{80}$ (v) $\frac{5}{16}$

(2) ചുവടെയുള്ള തുകകളുടെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125}$

(ii) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4}$

(iii) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$

(3) ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യയെ മറ്റൊരു രണ്ടക്കസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചപ്പോൾ 5.875 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

പുതിയ രൂപങ്ങൾ

ഛേദം 10 ന്റെ കൃതിയല്ലാത്ത ചില ഭിന്നങ്ങളെ, അത്തരം രൂപത്തിലാക്കി ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നത് കണ്ടല്ലോ.

$\frac{1}{3}$ നെ ഇങ്ങനെ മാറ്റാൻ കഴിയുമോ?

3 നെ ഏതു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലും 10 ന്റെ ഒരു കൃതിയും കിട്ടില്ലല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?)

അപ്പോൾ $\frac{1}{3}$ ന് ആദ്യം പറഞ്ഞ രീതിയിലുള്ള ദശാംശരൂപമില്ല.

പക്ഷേ 10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകളൊന്നും $\frac{1}{3}$ ന് തുല്യമല്ലെങ്കിലും, ഇത്തരത്തിലുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്ന രീതിയിൽ ഉണ്ടാക്കാം.

ആദ്യം 10 ഛേദമായ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യ, $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തായി കണ്ടുപിടിക്കാം. അതിന് 10 നെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

$\frac{10}{3}$ ന്റെ $\frac{1}{10}$ ഭാഗമാണല്ലോ $\frac{1}{3}$; അതായത്

$$\frac{1}{3} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{10}$$

ഇനി

$$\frac{1}{3} = \left(3 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{30}$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

ഇതുതന്നെ ഇങ്ങനെയും എഴുതാം:

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

ഇതുപോലെ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തുള്ള, 100 ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാം.

അതിന് ആദ്യം 100 നെ 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ച്, ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$$

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, ഇതിൽനിന്ന്

$$\frac{1}{3} = \frac{100}{3} \times \frac{1}{100} = \left(33 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{100} = \frac{33}{100} + \frac{1}{300}$$

ഇത് ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം:

$$\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$

$\frac{1}{30}$ നേക്കാൾ വളരെ ചെറിയ സംഖ്യയാണല്ലോ $\frac{1}{300}$. അപ്പോൾ $\frac{33}{100}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യ $\frac{3}{10}$ നേക്കാൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്ത സംഖ്യയാണ്.

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1}{3000}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{3333}{10000} = \frac{1}{30000}$$

എന്നെല്ലാം കാണാം.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ,

$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്നു.

അൽപം മാറ്റി ഇങ്ങനെയും പറയാം:

$$0.3, 0.33, 0.333...$$

എന്നിങ്ങനെ ദശാംശരൂപമുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്നു.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്:

$$\frac{1}{3} = 0.333...$$

ഇതിലെ 0.333... എന്ന ദശാംശരൂപം, ആദ്യം കണ്ട ദശാംശരൂപങ്ങളിൽനിന്നു വ്യത്യസ്തമാണ് എന്നത് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കണം.

10 ന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതി ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകളെയാണ് ആദ്യഭാഗത്ത് ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതിയത്. ഉദാഹരണമായി, 0.3 എന്നത് $\frac{3}{10}$ എന്ന ഭിന്നത്തിന്റെ ദശാംശരൂപവും, 0.33 എന്നത് $\frac{33}{100}$ എന്ന ഭിന്നത്തിന്റെ ദശാംശരൂപവുമൊക്കെയാണ്.

എന്നാൽ 0.333... സൂചിപ്പിക്കുന്നത് 10 ന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതി ഛേദമായ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയെയല്ല, 10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ഒരു നിര ക്രമേണ സമീപിക്കുന്ന ഭിന്നസംഖ്യയെയാണ്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതുപോലെ ഇങ്ങനെ സമീപിക്കുന്ന ഭിന്നസംഖ്യ $\frac{1}{3}$ ആയതിനാൽ, ഇതിനെ $\frac{1}{3}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം എന്നു പറയുന്നു.

$\frac{1}{3}$ പോലുള്ള സംഖ്യകളെ ഉൾക്കൊള്ളാനായി, ദശാംശരൂപം എന്നതിന്റെ അർഥം അൽപം വിപുലീകരിക്കുകയാണ് ഇവിടെ ചെയ്യുന്നത്.

മറ്റൊരുദാഹരണം നോക്കാം: $\frac{1}{6}$ നും 10 ന്റെ കൃതി ഛേദമായ തുല്യഭിന്നമില്ലല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?); ഇതിന്റെയും ഈ പുതിയ രീതിയിലുള്ള ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കാം.

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ 10, 100, 1000, ... എന്നീ സംഖ്യകളെ 6 കൊണ്ട് ഹരിച്ച്, ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$\frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$\frac{100}{6} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

$$\frac{1000}{6} = \frac{500}{3} = 166\frac{2}{3}$$

ഇനി ഇവയിൽനിന്ന് $\frac{1}{6}$ നോട് അടുത്ത, ഛേദം 10 ന്റെ കൃതിയായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം:

$$\frac{1}{6} = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{6} = \left(16 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{100} = \frac{16}{100} + \frac{1}{150}$$

$$\frac{1}{6} = \left(166 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{1000} = \frac{166}{1000} + \frac{1}{1500}$$

ഇതിൽനിന്ന് $\frac{1}{6}$ നോട് അടുത്തുവരുന്ന, 10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കാണാമല്ലോ.

$\frac{1}{10}, \frac{16}{100}, \frac{166}{1000}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ (അഥവാ, 0.1, 0.16, 0.166, ... എന്നിങ്ങനെ ദശാംശരൂപമുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ) $\frac{1}{6}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കി ദശാംശരൂപമായി എഴുതാം.

$$\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$$

ഇങ്ങനെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ 10, 100, 1000, ... എന്നീ സംഖ്യകളെ ഹരിക്കാൻ, ഓരോന്നിനും ആദ്യം മുതൽ തുടങ്ങേണ്ടതില്ല. ഒരു ഹരണത്തിന്റെ തുടർച്ചയായി അടുത്തത് ചെയ്യാം. ഉദാഹരണമായി, $\frac{1}{7}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആദ്യം 10 നെ 7 കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$$

അടുത്തതായി 100 നെ 7 കൊണ്ടു ഹരിക്കണം. അതിന് ആദ്യത്തെ ക്രിയ ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെ തുടരാം:

ആവർത്തിക്കുന്ന ദശാംശം

10 ന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതി ഛേദമായി വരാത്ത ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപം അനന്തമായി തുടരുന്നു. പക്ഷേ ഇവയിലെല്ലാം, ഒരു ഘട്ടത്തിനുശേഷം ഒരു കൂട്ടം അക്കങ്ങൾ ഒരേ ക്രമത്തിൽ തുടർച്ചയായി ആവർത്തിക്കുന്നതു കാണാം.

ഇതിനൊരു കാരണമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി $\frac{1}{17}$ നോക്കാം. 10, 100, 1000, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള 10 ന്റെ കൃതികളെ തുടർച്ചയായി 17 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാണല്ലോ ഇതിന്റെ ദശാംശരൂപത്തിലെ അക്കങ്ങൾ കണക്കാക്കേണ്ടത്. ഇങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ ഓരോഘട്ടത്തിലും കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടത്തെ 10 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് വീണ്ടും 17 കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതാണ് അടുത്ത ഘട്ടം.

ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടങ്ങൾ 1 മുതൽ 16 വരെയുള്ള ഏതെങ്കിലും സംഖ്യ ആകണമല്ലോ. അപ്പോൾ പരമാവധി 16 ഹരണം കഴിയുമ്പോൾ മുമ്പു കിട്ടിയ ഏതെങ്കിലുമൊരു ശിഷ്ടം വീണ്ടും വരും. തുടർന്ന് പഴയ അക്കങ്ങൾ അതേ ക്രമത്തിൽ ആവർത്തിക്കും.

കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച് $\frac{1}{17}$ കണക്കാക്കിയാൽ

$$\frac{1}{17} = 0.05882352941176470588235294117647\ldots$$

എന്നിങ്ങനെ പതിനാറക്കക്കൂട്ടങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്നത് കാണാം.

എന്നാൽ $\frac{1}{13}$ ന്റെ ദശാംശരൂപത്തിൽ പന്ത്രണ്ടക്കക്കൂട്ടങ്ങളല്ല, ആറക്കക്കൂട്ടങ്ങളാണ് ആവർത്തിക്കുന്നതെന്നും കാണാം:

$$\frac{1}{13} = 0.076923076923\ldots$$

ഇത്തരം ദശാംശരൂപങ്ങളെക്കുറിച്ച് കൂടുതലറിയാൻ വിക്കിപ്പീഡിയ നോക്കുക:

https://en.wikipedia.org/wiki/Repeating_decimal

മറിച്ചൊരു ചിന്ത

10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപം മാത്രമാണ് ഷിമൺ സ്റ്റെവിൻ അവതരിപ്പിച്ചത്. അങ്ങനെയല്ലാത്ത ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപം ഉണ്ടാക്കിയത് പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ്.

അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യമുണ്ട്: അക്കങ്ങൾ ചാക്രികമായി ആവർത്തിക്കുന്ന രൂപത്തിൽ ഒരു ദശാംശഭിന്നം എഴുതിയാൽ, അത് ഏത് ഭിന്നസംഖ്യയെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്?

ഉദാഹരണമായി 0.121212... ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപമാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആ സംഖ്യ x എന്നെടുത്ത്, ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

- $\frac{12}{100}, \frac{1212}{10000}, \frac{121212}{1000000}$ എന്നീ സംഖ്യകൾ x നോട് അടുക്കുന്നു.
- ഇവയെ 100 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ $12, 12\frac{12}{100}, 12\frac{1212}{10000}, \dots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ $100x$ നോട് അടുക്കുന്നു.
- $12, 12 + \frac{12}{100}, 12 + \frac{1212}{10000}, \dots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ ആദ്യം പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, $12 + x$ നോടാണ് അടുക്കുന്നതെന്നു കാണാം.
- അപ്പോൾ $100x = 12 + x$
- ഇതിൽനിന്ന് $x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

ഈ രീതി ചുരുക്കി

$$x = 0.1212\dots$$
$$100x = 12.1212\dots = 12 + x$$

എന്നെഴുതാറുണ്ട്.

$$\frac{100}{7} = \left(1+\frac{3}{7}\right) \times 10 = 10 + \frac{30}{7} = 10 + 4 + \frac{2}{7} = 14\frac{2}{7}$$

ഇനി ഇങ്ങനെ തുടരാമല്ലോ:

$$\frac{1000}{7} = \frac{100}{7} \times 10 = 140 + \frac{20}{7} = 140 + 2 + \frac{6}{7} = 142\frac{6}{7}$$

തുടർന്നുള്ള മൂന്നു ഹരണങ്ങളും വേഗം എഴുതാം (പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം തെറ്റാതിരിക്കാൻ കൃതികൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതാണ് സൗകര്യം):

$$\frac{10^4}{7} = 1420 + \frac{60}{7} = 1420 + 8 + \frac{4}{7} = 1428\frac{4}{7}$$

$$\frac{10^5}{7} = 14280 + \frac{40}{7} = 14280 + 5 + \frac{5}{7} = 14285\frac{5}{7}$$

$$\frac{10^6}{7} = 142850 + \frac{50}{7} = 142850 + 7 + \frac{1}{7} = 142857\frac{1}{7}$$

ഇനി തുടരേണ്ടതുണ്ടോ? അൽപം ആലോചിക്കാം. അടുത്ത ഹരണം ഇങ്ങനെയാണ്.

$$\frac{10^7}{7} = 1428570 + \frac{10}{7}$$

ഇതിൽ $\frac{10}{7}$ ആദ്യം കണ്ടുപിടിച്ചതല്ലേ? അപ്പോൾ

$$\frac{10^7}{7} = 1428571\frac{3}{7}$$

ഇനിയും തുടർന്നാലോ? $\frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$ അതിനുശേഷം $\frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$ എന്നിങ്ങനെ മുമ്പ് ചെയ്ത ക്രിയകൾതന്നെ അതേ ക്രമത്തിൽ ആവർത്തിക്കും.

ഈ ചിന്തകളുടെ അവസാനം

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\dots$$

എന്ന് ആറക്കക്കൂട്ടങ്ങളുടെ ആവർത്തനമായി എഴുതാം. (വ്യക്തമായില്ലെങ്കിൽ, ഈ ക്രിയകളുടെ തുടക്കം മുതൽ ഒന്നുകൂടി വായിച്ചു നോക്കൂ)

(1) ചുവടെയുള്ള ഭിന്നങ്ങൾ ഓരോന്നിനും അടുത്തടുത്തുവരുന്ന 10 ന്റെ കൃതി ഛേദമായ ഭിന്നങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ച്, ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതുക.

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{5}{6}$ (iii) $\frac{1}{9}$

(2) (i) ഏതു സംഖ്യയുടെയും $\frac{1}{10}, \frac{11}{100}, \frac{111}{1000}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഭാഗങ്ങളെടുത്താൽ, അവ സംഖ്യയുടെ $\frac{1}{9}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നു ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു വിശദീകരിക്കുക.

(ii) മുകളിൽ പറഞ്ഞ പൊതുതത്വം ഒരക്കസംഖ്യകളിൽ ഉപയോഗിച്ച് $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ എന്നിവയുടെ ദശാംശരൂപങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(iii) ഒരേയൊരു അക്കം ആവർത്തിച്ചുവരുന്ന ദശാംശരൂപങ്ങളെക്കുറിച്ച് പൊതുവേ എന്തു പറയാം?

(3) (i) $\frac{1}{11}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(ii) $\frac{2}{11}, \frac{3}{11}$ എന്നീ ഭിന്നങ്ങളുടെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(iii) $\frac{10}{11}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം എന്താണ്?

രണ്ടു രൂപങ്ങൾ

0.4999... എന്ന ദശാംശരൂപം ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഇത്തരം ദശാംശരൂപങ്ങളുടെ നിർവചനമനുസരിച്ച്, $\frac{4}{10}, \frac{49}{100}, \frac{499}{1000} \ldots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഏതു സംഖ്യയോട് അടുക്കുന്നു എന്നാണ് കാണേണ്ടത്.

$$\frac{1}{2} - \frac{49}{100} = \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{499}{1000} = \frac{1}{1000}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{4999}{10000} = \frac{1}{10000}$$

എന്ന് കാണാൻ വിഷമമില്ല. അതായത്, ഈ സംഖ്യകൾ $\frac{1}{2}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു. അപ്പോൾ, പുതിയ ദശാംശരീതി അനുസരിച്ച്.

$$\frac{1}{2} = 0.4999\ldots$$

എന്നും എഴുതാം.

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$$

എന്ന ദശാംശരൂപം നേരത്തെ കണ്ടതാണല്ലോ. ഇതുപോലെ 0.19, 0.199, 0.1999... എന്നീ സംഖ്യകൾ $\frac{1}{5}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ $\frac{1}{5}$ ന് 0.2 എന്ന പഴയ രൂപത്തിനുപുറമെ, 0.1999... എന്ന പുതിയ രൂപവുമുണ്ട്.

ഇതുപോലെ എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും പുതിയ ദശാംശരൂപങ്ങളുണ്ട്.

$$1 = 0.999\ldots$$

$$2 = 1.999\ldots$$

$$3 = 2.999\ldots$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, പുതിയ ദശാംശരൂപങ്ങൾ അനുവദിച്ചപ്പോൾ, പഴയ രൂപങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരു പുതുരൂപവുംകൂടി കിട്ടുന്നു.

(4) ചുവടെയുള്ള ക്രിയാഫലങ്ങൾ കണക്കാക്കി ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതുക:

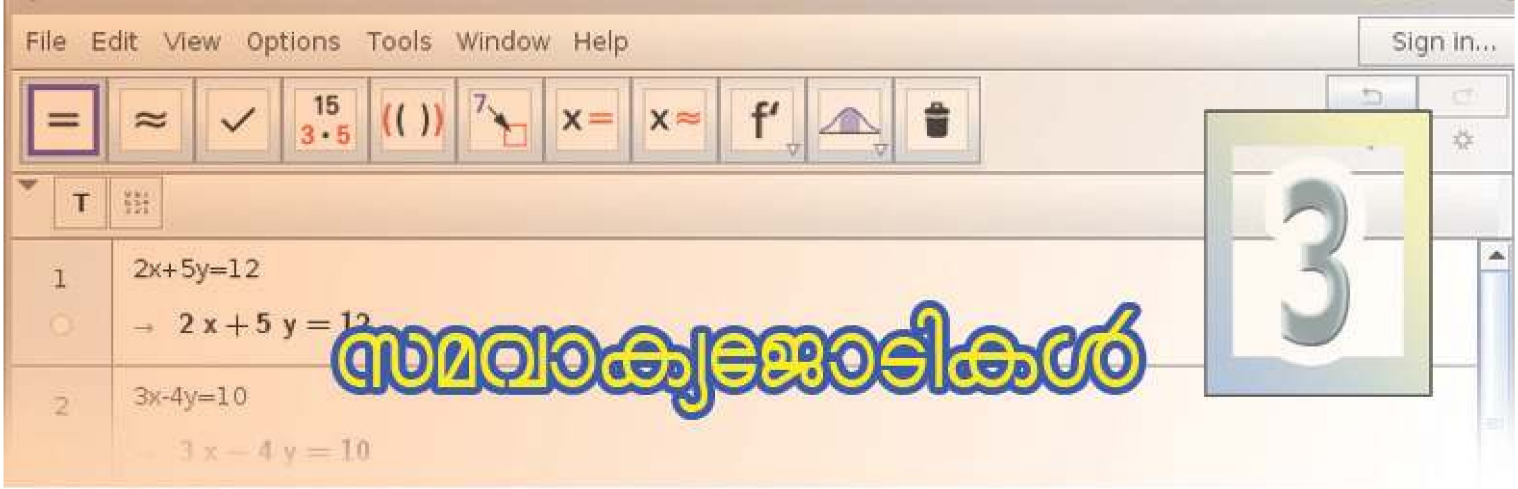
(i) $0.111... + 0.222...$

(ii) $0.333... + 0.777...$

(iii) $0.333... \times 0.666...$

(iv) $(0.333...)^2$

(v) $\sqrt{0.444...}$



3 സമവാക്യജോടികൾ

മനക്കണക്കും ബീജഗണിതവും

ആദ്യംതന്നെ ഒരു കണക്കാവാം.

> ഒരു ചെപ്പിൽ കറുപ്പും വെളുപ്പുമായി 100 മുത്തുകളുണ്ട്; വെളുപ്പിനേക്കാൾ 10 കൂടുതലാണ് കറുപ്പ്; കറുപ്പെത്ര? വെളുപ്പെത്ര?

പലതരത്തിൽ ആലോചിക്കാം. കൂടുതലുള്ള 10 കറുത്ത മുത്തുകൾ തൽക്കാലം മാറ്റിവച്ചാൽ, ചെപ്പിൽ 90 മുത്തുകൾ; ഇതിൽ കറുപ്പും വെളുപ്പും തുല്യം, അതായത് 45 വീതം. ഇനി മാറ്റിവച്ച കറുപ്പും കൂടിയെടുത്താൽ, കറുപ്പ് 55 ആകും; വെളുപ്പ് 45 തന്നെ

ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചും ചെയ്യാം (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **സമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠം). കറുത്ത മുത്തുകൾ x എണ്ണം എന്നെടുത്താൽ, വെളുത്ത മുത്തുകൾ $x - 10$; എല്ലാംകൂടി 100 ആയതിനാൽ

$$x + (x - 10) = 100$$

ഇതിൽനിന്ന് x മാത്രം വേർതിരിച്ചെടുക്കാം

$$\begin{aligned} 2x - 10 &= 100 \\ 2x &= 110 \\ x &= 55 \end{aligned}$$

അങ്ങനെ, കറുത്ത മുത്തുകൾ 55 എന്നു കിട്ടും; 10 കുറച്ച് വെളുത്ത മുത്തുകൾ 45 എന്നും കാണാം.

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചുതന്നെ മറ്റൊരു വഴിയുണ്ട്: കറുത്ത മുത്തുകൾ x എണ്ണം, വെളുത്ത മുത്തുകൾ y എണ്ണം എന്നെടുത്താൽ, കണക്കിൽ പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങൾ രണ്ടു സമവാക്യമാക്കാം.

$$x + y = 100$$

$$x - y = 10$$

ഇതിൽ നിന്ന് x ഉം y ഉം വേർതിരിച്ചെടുക്കുന്നതെങ്ങനെ?

NT-503-3-MATHS-9-M-VOL.1

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും കൂട്ടിയാൽ, വലിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കിട്ടുമെന്ന്, ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ? (**മാറുന്ന സംഖ്യകളും മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **തുകയും വ്യത്യാസവും** എന്ന ഭാഗം)

തുകയിൽ നിന്ന് വ്യത്യാസം കുറച്ചാൽ, ചെറിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കിട്ടുമെന്നും കണ്ടു.

അപ്പോൾ മുത്തുകണക്കിൽ

$$2x = (x + y) + (x - y) = 110$$

$$2y = (x + y) - (x - y) = 90$$

ഇനി $x = 55$, $y = 45$ എന്നും കാണാം

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

> ഒരു മേശയ്ക്കും കസേരയ്ക്കും കൂടി 5000 രൂപയാണ് വില. ഒരു മേശയ്ക്കും നാലു കസേരയ്ക്കും കൂടി 8000 രൂപയും. ഓരോന്നിന്റെയും വിലയെത്രയാണ്?

ആദ്യം മനസിൽത്തന്നെ ചെയ്യാമോ എന്നു നോക്കാം. ഒരു മേശയും നാലു കസേരയുമായപ്പോൾ, വില 3000 രൂപ കൂടി. ഇതിനു കാരണം, മൂന്നു കസേരകൂടി വാങ്ങുന്നതുകൊണ്ടല്ലേ? അതായത്, മൂന്നു കസേരയുടെ വിലയാണ് കൂടുതൽ വന്ന 3000 രൂപ, അപ്പോൾ ഒരു കസേരയുടെ വില 1000 രൂപ, മേശയുടെ വില 4000 രൂപ

ഇങ്ങനെയൊന്നും ആലോചിക്കാതെ, കസേരയുടെ വില x രൂപ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം; ഇനി അൽപമൊന്നാലോചിച്ചാൽ, മേശയുടെ വില $5000 - x$ രൂപ എന്നു കാണാം. ഒരു മേശയും, നാലു കസേരയുമായാൽ $(5000 - x) + 4x$ രൂപ; ഇത് 8000 രൂപയാണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അതായത്,

$$(5000 - x) + 4x = 8000$$

ഇതിൽനിന്ന് x കണക്കാക്കാം:

$$5000 + 3x = 8000$$

$$3x = 3000$$

$$x = 1000$$

അങ്ങനെ കസേരയുടെ വില 1000 രൂപ എന്നു കിട്ടും; മേശയുടെ വില $5000 - 1000 = 4000$ രൂപയെന്നും.

ആദ്യം ഒന്നുംതന്നെ ആലോചിക്കാതെ, കസേരയുടെ വില x രൂപ, മേശയുടെ വില y രൂപ എന്നെടുത്തും തുടങ്ങാം. അപ്പോൾ കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാക്കാം;

$$x + y = 5000$$

$$4x + y = 8000$$

ഇനി ആദ്യത്തെ സമവാക്യമനുസരിച്ച്, y എന്ന സംഖ്യ x എന്ന സംഖ്യയിൽനിന്നു കണക്കാക്കാം:

$$y = 5000 - x$$

അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലെ y യ്ക്കു പകരം $5000 - x$ ഉപയോഗിക്കാം:

$$4x + (5000 - x) = 8000$$

ഇത് കസേരയുടെ വില മാത്രം x എന്നെടുത്തു കിട്ടിയ പഴയ സമവാക്യംതന്നെയല്ലേ? ഇതിൽനിന്ന് ആദ്യത്തെ പോലെ വില രണ്ടും കണക്കാക്കാം.

ഒരു കണക്കുകൂടി;

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ $\frac{1}{2}$ കിട്ടി. ഛേദത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയത് $\frac{1}{3}$ ഉം. ഏതാണാ ഭിന്നസംഖ്യ?

ഇത് മനക്കണക്കായി ചെയ്യാൻ പ്രയാസമുണ്ട്; അംശമോ ഛേദമോ x എന്നു മാത്രമെടുത്താലും ഏറെയൊന്നും മുന്നോട്ട് പോകില്ല. അംശം x ഉം ഛേദം y ഉം എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം. അപ്പോൾ കണക്കിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങളോരോന്നും സമവാക്യങ്ങളാക്കാം.

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$$

ആദ്യത്തെ സമവാക്യമനുസരിച്ച് y എന്ന സംഖ്യ, $x + 1$ എന്ന സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് ആകണമല്ലോ. അതായത്,

$$2\,(x + 1) = y$$

ഇനി രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിൽനിന്ന് $y + 1$ എന്ന സംഖ്യ, x എന്ന സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണെന്നും കിട്ടും. അതായത്,

$$y + 1 = 3x$$

ആദ്യത്തെ സമവാക്യം പറയുന്നത് y എന്ന സംഖ്യയും $2\,(x + 1)$ എന്ന സംഖ്യയും തുല്യമാണെന്നാണ്; അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലെ y യ്ക്കു പകരം $2\,(x + 1)$ എഴുതാം. അതായത്

$$3x = 2\,(x + 1) + 1 = 2x + 3$$

ഇതിൽ നിന്ന് $x = 3$ എന്നു കാണാം. തുടർന്ന് ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് $y = 2 \times 4 = 8$ എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ $\frac{3}{8}$ ആണ് കണക്കിലെ ഭിന്നസംഖ്യ.

?

ചുവടെപ്പറയുന്ന കണക്കുകളോരോന്നും മനക്കണക്കായോ, ഒരക്ഷരം മാത്രമുള്ള സമവാക്യമാക്കിയോ, രണ്ടക്ഷരമുള്ള രണ്ടു സമവാക്യമാക്കിയോ ചെയ്യുക.

(1) ചുറ്റളവ് ഒരു മീറ്ററായ ചതുരത്തിൽ, വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ അഞ്ചുസെന്റിമീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു ക്ലാസിൽ ആൺകുട്ടികളേക്കാൾ 4 പെൺകുട്ടികൾ കൂടുതലുണ്ട്. 8 ആൺകുട്ടികൾ മാത്രം വരാതിരുന്ന ഒരു ദിവസം , ആൺകുട്ടികളുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് പെൺകുട്ടികളായി. ക്ലാസിൽ എത്ര പെൺകുട്ടികളും എത്ര ആൺകുട്ടികളുമാണ്?

(3) ഒരാൾ 10000 രൂപ ഭാഗിച്ച് രണ്ടു പദ്ധതികളിലായി നിക്ഷേപിച്ചു; 8 ശതമാനവും, 9 ശതമാനവുമാണ് വാർഷിക പലിശ നിരക്ക്. ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞ് രണ്ടു പദ്ധതിയിൽനിന്നുമായി 875 രൂപ പലിശ കിട്ടി. ഓരോന്നിലും എത്ര രൂപയാണ് നിക്ഷേപിച്ചത്?

(4) മൂന്നര മീറ്റർ നീളമുള്ള കമ്പി രണ്ടായി മുറിച്ച്, ഒരു കഷണം വളച്ചൊരു സമചതുരവും, മറുകഷണം വളച്ചൊരു സമഭുജത്രികോണവുമുണ്ടാക്കണം. രണ്ടിന്റെയും വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമായിരിക്കണം. എങ്ങനെ മുറിക്കണം?

(5) ഒരു സെക്കന്റിൽ u മീറ്റർ എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി, ഓരോ സെക്കന്റിലും a മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കൂടി, നേർവരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു, t സെക്കന്റിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം $ut + \frac{1}{2}at^2$ ആണ്. ഇങ്ങനെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു 2 സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്ററും, 4 സെക്കന്റിൽ 28 മീറ്ററും സഞ്ചരിക്കുന്നു. യാത്രയുടെ തുടക്കത്തിൽ വേഗം എന്തായിരുന്നു? ഓരോ സെക്കന്റിലും വേഗം കൂടുന്നതിന്റെ നിരക്കെന്താണ്?

രണ്ടു സമവാക്യങ്ങൾ

ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

> 2 പേനയ്ക്കും 3 നോട്ടുബുക്കിനും കൂടി 40 രൂപ. 2 പേനയ്ക്കും 5 നോട്ടുബുക്കിനുമാണെങ്കിൽ 60 രൂപ. ഒരു പേനയുടെ വില എത്രയാണ്? ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെയോ?

നേരത്തെ ചെയ്ത കസേര–മേശ കണക്കുപോലെ ആലോചിച്ചു നോക്കൂ. ആദ്യം പറഞ്ഞ 40 രൂപയിൽനിന്ന് വില 60 രൂപയായി കൂടിയതെങ്ങനെ?

2 നോട്ടുബുക്ക് കൂടി വാങ്ങിയതുകൊണ്ടല്ലേ? അതായത്, 2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വിലയാണ് കൂടുതലായ 20 രൂപ. അപ്പോൾ ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 10 രൂപ.

ഇനി ആദ്യം പറഞ്ഞതിൽനിന്ന് 2 പേനയുടെ വില കിട്ടാൻ, 40 രൂപയിൽനിന്ന് മൂന്നു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില കുറച്ചാൽപ്പോരേ? അതായത്, 40 – 30 = 10 രൂപ. അപ്പോൾ ഒരു പേനയുടെ വില 5 രൂപ.

ഇനി, പേനയുടെ വില x രൂപ, നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില y രൂപ എന്നെടുത്ത്, കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കി, ഇതു ചെയ്യുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

2 പേനയുടെയും 3 നോട്ടുബുക്കിന്റെയും വില 40 രൂപ	$2x + 3y = 40$
2 പേനയുടെയും 5 നോട്ടുബുക്കിന്റെയും വില 60 രൂപ	$2x + 5y = 60$
കൂടുതലായത് 2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില	$(2x + 5y) - (2x + 3y) = 2y$
കൂടുതലായത് 20 രൂപ	$60 - 40 = 20$
2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 20 രൂപ	$2y = 20$
ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 10 രൂപ	$y = 10$
2 പേനയുടെ വില, 40 രൂപയിൽനിന്ന് 30 രൂപ കുറച്ചത്	$2x = 40 - (3 \times 10) = 10$
ഒരു പേനയുടെ വില 5 രൂപ	$x = 5$

അൽപം വ്യത്യസ്തമായ ഒരു കണക്ക് നോക്കൂ:

3 പെൻസിലിനും 4 പേനയ്ക്കും കൂടി 26 രൂപയാണ് വില. 6 പെൻസിലിനും 3 പേനയ്ക്കുമാണെങ്കിൽ 27 രൂപയും. പെൻസിലിന്റേയും പേനയുടേയും വില എത്രയാണ്?

ആദ്യം ബീജഗണിതമില്ലാതെ നോക്കാം. ഇവിടെ രണ്ടാമത്തെ വില കൂടാൻ കാരണം, ആദ്യത്തെ കണക്കുപോലെ, ഒരു സാധനം മാത്രം കൂടിയതുകൊണ്ടല്ല. അപ്പോൾ അതുപോലെ അത്ര എളുപ്പമല്ല ഇതിലെ കാര്യങ്ങൾ.

രണ്ടു വിവരങ്ങളിലും പെൻസിലോ, പേനയോ ഒരേ എണ്ണമായിരുന്നെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ കണക്കുപോലെ ചെയ്യാമായിരുന്നു. അങ്ങനെയാക്കിയാലോ?

വിലകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതിവച്ചു തുടങ്ങാം.

പെൻസിൽ	പേന	വില
3	4	26
6	3	27

ആദ്യം പറഞ്ഞതിൽ 3 പെൻസിലും, രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതിൽ 6 പെൻസിലുമാണ്. ആദ്യത്തേതിലും 6 പെൻസിൽതന്നെ ആക്കാൻ പറ്റുമോ?

6 പെൻസിലും, 8 പേനയുമായാലോ?

	പെൻസിൽ	പേന	വില
	3	4	26
$\times 2$	6	3	27
	6	8	52

മൂന്നാമത്തെ വരിയിൽ രണ്ടാമത്തെ വരിയേക്കാൾ വില 25 രൂപ കൂടിയത്, 5 പേനയുടെ മാത്രം വിലയല്ലേ?

അപ്പോൾ, ഒരു പേനയുടെ വില 5 രൂപ. ഇനി ആദ്യത്തെ വരിയിൽ നിന്ന്, 3 പെൻസിലിന്റെ വില 26 – 20 = 6 രൂപ, ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില 2 രൂപ എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

ഇനി ഈ ചിന്തകളെല്ലാം ബീജഗണിതത്തിലെഴുതിനോക്കാം. ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില x രൂപയെന്നും, ഒരു പേനയുടെ വില y രൂപയെന്നുമെടുത്താൽ, കണക്കിലെ വിവരങ്ങളും അതുപയോഗിച്ച് വിലകൾ കണ്ടുപിടിച്ച രീതിയുമെല്ലാം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

3 പെൻസിലിന്റെയും 4 പേനയുടെയും വില 26 രൂപ	$3x + 4y = 26$
6 പെൻസിലിന്റെയും 3 പേനയുടെയും വില 27 രൂപ	$6x + 3y = 27$
6 പെൻസിലിന്റെയും 8 പേനയുടെയും വില 52 രൂപ	$6x + 8y = 2(3x + 4y) = 52$
കൂടുതലായത് 5 പേനയുടെ വില	$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 5y$
കൂടുതലായത് 25 രൂപ	$5y = 25$
ഒരു പേനയുടെ വില 5 രൂപ	$y = 5$
3 പെൻസിലിന്റെ വില 26 രൂപയിൽ നിന്ന് 20 രൂപ കുറച്ചത്	$3x = 26 - (4 \times 5) = 6$
ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില, 2 രൂപ	$x = 2$

ഈ ചെയ്തതെല്ലാം ചുരുക്കിയെഴുതാം. ആദ്യം കണക്കിൽ നിന്നു കിട്ടിയ വിവരങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതാം. അവയെ 1-ാം സമവാക്യമെന്നും, 2-ാം സമവാക്യമെന്നും വിളിക്കാം.

$$3x + 4y = 26 \qquad (1)$$

$$6x + 3y = 27 \qquad (2)$$

$3x + 4y$ എന്ന സംഖ്യ 26 ആണെന്നാണ് 1-ാം സമവാക്യം പറയുന്നത്; അപ്പോൾ അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് 52.

$$6x + 8y = 52 \qquad (3)$$

ഇനി 2-ാം സമവാക്യവും, 3-ാം സമവാക്യവും ഉപയോഗിച്ച്, ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 52 - 27$$

ഇത് ലഘൂകരിച്ച്

$$5y = 25$$

എന്നും അതിൽനിന്ന് $y = 5$ എന്നും കിട്ടും. തുടർന്ന് 1-ാം സമവാക്യത്തിൽ y ആയി 5 എടുത്താൽ x ഉം കണക്കാക്കാം.

$$3x + (4 \times 5) = 26$$

$$3x = 26 - 20 = 6$$

$$x = 2$$

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

ചെറിയ പാത്രത്തിൽ അഞ്ചു തവണയും, വലിയ പാത്രത്തിൽ രണ്ടു തവണയും വെള്ളം നിറച്ചൊഴിച്ചപ്പോൾ 20 ലിറ്റർ. ചെറിയ പാത്രത്തിൽ രണ്ടു തവണയും, വലിയ പാത്രത്തിൽ മൂന്നു തവണയും നിറച്ചൊഴിച്ചപ്പോഴോ, 19 ലിറ്ററും. ഓരോ പാത്രത്തിലും എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും?

ചെറിയ പാത്രത്തിൽ x ലിറ്ററും, വലിയ പാത്രത്തിൽ y ലിറ്ററും കൊള്ളും എന്നെടുത്ത്, കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങളാക്കാം:

$$5x + 2y = 20 \qquad (1)$$

$$2x + 3y = 19 \qquad (2)$$

ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ ചെയ്തതുപോലെ, ഇതിലെ (1) ലും $2x$ തന്നെയാക്കണമെങ്കിൽ, $\frac{2}{5}$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം; മറിച്ച്, (2) ൽ $5x$ ആക്കണമെങ്കിൽ $\frac{5}{2}$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം.

ഒരു ജോടി സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ CAS ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന്, 5x+2y=20, 2x+3y=19 എന്നീ സമവാക്യജോടികളുടെ പരിഹാരം കാണാൻ CAS തുറന്ന് (view→CAS), Solve({5x+2y=20, 2x+3y=19}, {x, y}) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി.

വ്യത്യസ്ത വിവരങ്ങൾ

രാമു 7 രൂപ കൊടുത്ത് ഒരു പെൻസിലും ഒരു പേനയും വാങ്ങി. അജു 4 പെൻസിലും 4 പേനയും വാങ്ങി; 28 രൂപയായി. ഈ വിവരങ്ങൾ വച്ചുകൊണ്ട് ഓരോന്നിന്റേയും വില കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഇവർ ശ്രമിച്ചു. പെൻസിലിന്റെ വില x എന്നെടുത്ത് ആദ്യം പറഞ്ഞതുപയോഗിച്ച് പേനയുടെ വില $7 - x$ എന്നാക്കി. രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതുപയോഗിച്ച്

$$4x + 4(7 - x) = 28$$

എന്നെഴുതി. ഇതു ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയതോ? $28 = 28$

ഇവിടെ, പെൻസിലിന്റെ വില x, പേനയുടെ വില y എന്നെടുത്തിരുന്നെങ്കിലോ?

$$x + y = 7$$

$$4x + 4y = 28$$

രണ്ടാമതെഴുതിയ സമവാക്യത്തിനെ

$$4(x + y) = 28$$

എന്നാക്കിയാൽ വീണ്ടും

$$x + y = 7$$

എന്നു തന്നെയല്ലേ കിട്ടുന്നത്?

അതായത്, ഈ കണക്കിൽ രണ്ടായിപ്പറഞ്ഞുവെങ്കിലും, വിലകൾ തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധം മാത്രമേ യഥാർത്ഥത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ളൂ. അതുമാത്രം ഉപയോഗിച്ച് വിലകൾ വെവ്വേറെ കണ്ടുപിടിക്കാനും കഴിയില്ല.

കണക്കും കാര്യവും

10 മീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം. നീളം, വീതിയേക്കാൾ 5.5 മീറ്റർ കൂടുതലാകണം. നീളവും വീതിയും എത്രയാകണം?

വീതി x എന്നെടുത്താൽ, നീളം $x + 5.5$ ആകണം. ചുറ്റളവ് 10 മീറ്ററാകണം എന്നതിനാൽ

$$x + (x + 5.5) = \frac{10}{2} = 5$$

അതായത്,

$$2x + 5.5 = 5$$

അഥവാ

$$2x = -0.5$$
$$x = -0.25$$

ഇത് ശരിയാകില്ലല്ലോ. ചതുരത്തിന്റെ അളവുകളെങ്ങനെ ന്യൂനസംഖ്യകളാകാം?

ഇതിന്റെ അർഥം, ഈ നിബന്ധനകൾ രണ്ടും ശരിയാകുന്ന തരത്തിൽ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നതാണ്. ഈ കണക്കിൽ വീതി x, നീളം y എന്നെടുത്തിരുന്നെങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന് കിട്ടുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ

$$x + y = 5$$
$$y - x = 5.5$$

ഇത് രണ്ടും ശരിയാകുന്ന അധിസംഖ്യകൾ ഇല്ലെന്ന് പെട്ടെന്ന് മനസിലാക്കാം. (രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ തുക, അവയുടെ വ്യത്യാസത്തെക്കാൾ ചെറുതാകില്ലല്ലോ.)

ഇങ്ങനെ ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ, ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇല്ലാതെ ചെയ്യാനൊരു മാർഗമുണ്ട്. (1) ലും (2) ലും $10\,x$ ആക്കാം; അതിന് (1) നെ 2 കൊണ്ടും, (2) നെ 5 കൊണ്ടും ഗുണിച്ചാൽ മതി. സമവാക്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെ മാറും.

$$(1) \times 2: \ 10x + 4y = 40 \qquad (3)$$

$$(2) \times 5: \ 10x + 15y = 95 \qquad (4)$$

ഇനി (4) ൽ നിന്ന് (3) കുറച്ച്

$$(4) - (3): \ 11y = 55$$

എന്നും, അതിൽ നിന്ന്

$$y = 5$$

എന്നും കാണാം. തുടർന്ന്, ഇത് (1) ൽ ഉപയോഗിച്ച് x ഉം കണക്കാക്കാം.

$$5x + 10 = 20$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

അങ്ങനെ ചെറിയ പാത്രത്തിൽ 2 ലിറ്ററും, വലിയ പാത്രത്തിൽ 5 ലിറ്ററും കൊള്ളുമെന്നു കണക്കാക്കാം.

?

(1) രാജു ഇരുന്നൂറു പേജുള്ള നോട്ടുപുസ്തകം ഏഴെണ്ണവും, നൂറുപേജുള്ള നോട്ടുപുസ്തകം അഞ്ചെണ്ണവും വാങ്ങി. വില 107 രൂപ. ജോസഫ് ഇരുന്നൂറു പേജുള്ള നോട്ടുപുസ്തകം അഞ്ചെണ്ണവും, നൂറുപേജുള്ള നോട്ടുപുസ്തകം ഏഴെണ്ണവുമാണ് വാങ്ങിയത്. വില 97 രൂപയേ ആയുള്ളൂ. ഓരോ തരത്തിലുമുള്ള നോട്ടുബുക്കുകളുടെ വില എത്രയാണ്?

(2) ഒരു സംഖ്യയുടെ നാലു മടങ്ങും, മറ്റൊരു സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങും കൂട്ടിയപ്പോൾ 43 കിട്ടി. ആദ്യത്തെ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങിൽനിന്ന്, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കുറച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയത് 11. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

(3) ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക 11 ആണ്. ഈ സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങൾ പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യയേക്കാൾ 27 കൂടുതലാണ്. സംഖ്യകൾ എന്താണ്?

(4) നാലു വർഷം മുമ്പ്, റഹിമിന്റെ പ്രായം, രാമുവിന്റെ പ്രായത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങായിരുന്നു. രണ്ടു വർഷം കഴിയുമ്പോൾ ഇത് രണ്ടു മടങ്ങാകും. അവരുടെ ഇപ്പോഴത്തെ പ്രായം എത്രയാണ്?

(5) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം 5 മീറ്റർ കൂട്ടുകയും, വീതി 3 മീറ്റർ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ, പരപ്പളവ് 5 ചതുരശ്രമീറ്റർ കുറയും. നീളം 3 മീറ്ററും, വീതി 2 മീറ്ററും കൂട്ടിയാൽ, പരപ്പളവ് 50 ചതുരശ്രമീറ്റർ കൂടും. നീളവും വീതിയും എത്രയാണ്?

മറ്റു ചില സമവാക്യങ്ങൾ

ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

രണ്ടു സമചതുരങ്ങളിൽ വലുതിന്റെ വശം, ചെറുതിന്റെ വശത്തേക്കാൾ 5 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്, വലുതിന്റെ പരപ്പളവ്, ചെറുതിന്റെ പരപ്പളവിനേക്കാൾ 55 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്. രണ്ടിന്റെയും വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

വലുതിന്റെ ഒരു വശം x സെന്റിമീറ്ററെന്നും, ചെറുതിന്റെ ഒരു വശം y സെന്റിമീറ്റർ എന്നുമെടുത്താൽ, കണക്കിൽ പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങൾ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാക്കാം.

$$x - y = 5$$

$$x^2 - y^2 = 55$$

ഇനിയെന്തു ചെയ്യും?

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ എന്നറിയാമല്ലോ. ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെയും എഴുതാം.

$$x + y = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ ചതുരക്കണക്കിൽ

$$x + y = \frac{55}{5} = 11$$

ഇപ്പോൾ $x + y = 11$ എന്ന തുകയും, $x - y = 5$ എന്ന വ്യത്യാസവും ആയില്ലേ? ഇനി സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാമല്ലോ.

$$x = \frac{1}{2}(11 + 5) = 8$$

$$y = \frac{1}{2}(11 - 5) = 3$$

അതായത്, സമചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ, 8 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 10 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് $5\frac{1}{4}$ ചതുരശ്രമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ, y മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, ചുറ്റളവ്, $2(x+y)$ മീറ്റർ, പരപ്പളവ് xy ചതുരശ്രമീറ്റർ, അപ്പോൾ കണക്കിലെ വിവരങ്ങൾ ഇങ്ങനെ സമവാക്യങ്ങളാക്കാം.

$$x + y = 5$$

$$xy = 5\frac{1}{4}$$

ഇനിയോ? ഇവയിൽനിന്ന് $x - y$ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$ എന്നറിയാമല്ലോ. ഇത് ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ കണക്കിൽ

$$(x-y)^2 = 5^2 - \left(4 \times 5\frac{1}{4}\right) = 25 - 21 = 4$$

അപ്പോൾ $x - y = 2$. ഇനി, $x + y = 5$ എന്നതും കൂടി ഉപയോഗിച്ചാൽ $x = 3\frac{1}{2}, y = 1\frac{1}{2}$

അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ, $3\frac{1}{2}$ മീറ്ററും, $1\frac{1}{2}$ മീറ്ററും

(1) 10 മീറ്റർ നീളമുള്ള കയർ രണ്ടായി മുറിച്ച്, ഓരോ കഷണം കൊണ്ടും സമചതുരമുണ്ടാക്കണം. അവയുടെ അകത്തുള്ള പരപ്പളവുകളുടെ വ്യത്യാസം $1\frac{1}{4}$ ചതുരശ്രമീറ്ററാകണം. എങ്ങനെ മുറിക്കണം?

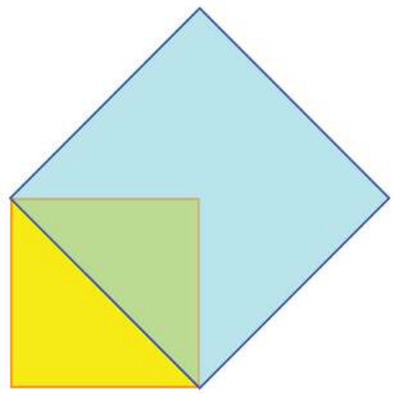
(2) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം, വീതിയേക്കാൾ 1 മീറ്റർ കൂടുതലാണ്; അതിന്റെ പരപ്പളവ് $3\frac{3}{4}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ. നീളവും വീതിയും എത്രയാണ്?

(3) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം $6\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് $7\frac{1}{2}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

4 പുതിയസംഖ്യകൾ

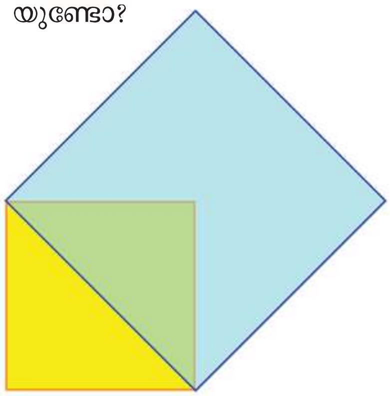
നീളങ്ങളും സംഖ്യകളും

ചിത്രം നോക്കൂ:



ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണം വശമായി മറ്റൊരു സമചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്ന് ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ?



അതായത്, ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം ഒരു മീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് രണ്ടു ചതുരശ്രമീറ്റർ.

അതിന്റെ ഒരുവശത്തിന്റെ നീളമെത്രയാണ്?

ഏതായാലും, ഒരു മീറ്ററിനേക്കാൾ കൂടുതലാണ്; രണ്ടു മീറ്ററിനേക്കാൾ കുറവും (അതെങ്ങനെ?) ഒന്നിനും രണ്ടിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ഭിന്നസംഖ്യ ആകാം; പക്ഷേ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് രണ്ടു ചതുരശ്രമീറ്ററായതിനാൽ, വശത്തിന്റെ നീളമായ ഈ സംഖ്യയുടെ വർഗം രണ്ടാകണം.

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗമാണ് രണ്ട്?

ഒന്നരയാകുമോ?

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

അത് കൂടുതലാണ്, ഒന്നേകാൽ ആയാലോ?

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16}$$

അത് കുറഞ്ഞുംപോയി. ഒന്നും മൂന്നിലൊന്നും ആയാലോ?

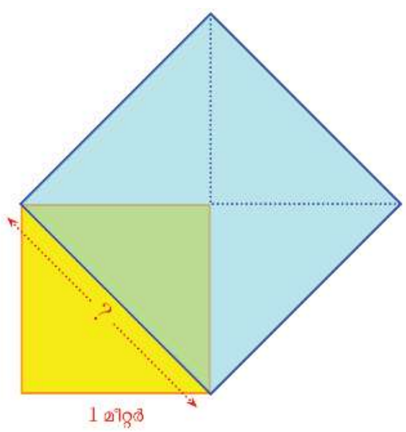
$$\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{9} = 1\frac{7}{9}$$

അതും കുറവ് തന്നെ; പക്ഷേ ഒന്നേകാലിനേക്കാൾ മെച്ചമാണ്.

ഇങ്ങനെ പല ഭിന്നസംഖ്യകളെടുത്ത് പരിശോധിച്ചാലും വർഗങ്ങൾ 2 നോട് വളരെ അടുത്തുവരുമെന്നല്ലാതെ, കൃത്യം 2 കിട്ടില്ല. ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഇതു തെളിയിക്കുകയും ചെയ്യാം (ഈ പാഠഭാഗത്തിന്റെ അവസാനമുള്ള അനുബന്ധം നോക്കുക).

അതായത്,

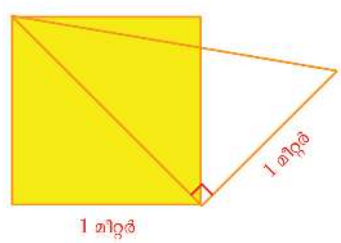
ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല.



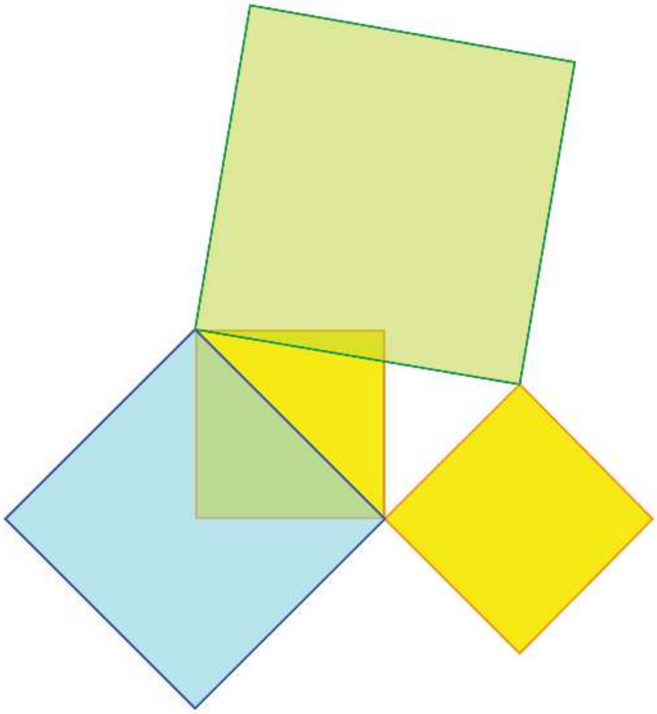
അപ്പോൾ നമ്മുടെ ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നം എന്തായി? വശങ്ങൾ ഒരു മീറ്ററായ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം, ഒരു മീറ്ററിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങാണെങ്കിൽ, ആ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം രണ്ട് ആകണം (വശങ്ങളുടെ നീളം ഭിന്നസംഖ്യയായാലും പരപ്പളവ് അതിന്റെ വർഗമാണെന്ന് ആറാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ) പക്ഷേ വർഗം രണ്ട് ആയ ഭിന്നസംഖ്യ ഇല്ല. അപ്പോൾ എന്തു പറയാം?

വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 1 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

ഇങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങൾ പലതുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിൽ വരച്ചിരിക്കുന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളമെന്താണ്? ഇതിന്റെ വശങ്ങളിലെല്ലാം സമചതുരങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കാം.



പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, നമ്മുടെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം വശമായ (പച്ച) സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $1 + 2 = 3$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. അപ്പോൾ അതിന്റെ നീളം 1 മീറ്ററിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങാണെങ്കിൽ, ആ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം 3 ആകണം.

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ലെന്നു കണ്ടതുപോലെതന്നെ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 3 അല്ലെന്നും കാണാം. അപ്പോൾ ഈ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളവും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം: വ്യാപ്തം 2 ഘനസെന്റിമീറ്ററായ ഒരു സമചതുരക്കട്ട ഉണ്ടാക്കണമെന്നു കരുതുക. ഇതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എന്തായിരിക്കണം? ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല എന്നതുപോലെതന്നെ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും മൂന്നാംകൃതിയും 2 അല്ല. അപ്പോൾ ഈ സമചതുരക്കട്ടയുടെ വശത്തിന്റെ നീളവും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകുന്നത്

എന്തിനേയും അളന്ന് സംഖ്യയാക്കുക; ഈ സംഖ്യകളിലൂടെയും അവയുടെ പരസ്പരബന്ധങ്ങളിലൂടെയും ലോകത്തെ മനസിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കുക – ഇതാണ് ഗണിതത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന ധർമ്മം.
അളക്കപ്പെടുന്ന വസ്തുവിന്റെ സ്വഭാവം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്ത തരത്തിലുള്ള സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കേണ്ടിവരും.
പ്രകൃതിയിൽ നിന്ന് നേരിട്ട് കിട്ടുന്നതു മാത്രം ഭക്ഷിച്ചു നടന്നിരുന്ന കാലത്ത് മനുഷ്യന് കൂട്ടത്തിലെ ആളുകളുടെ എണ്ണം, വളർത്തുന്ന കന്നുകാലികളുടെ എണ്ണം തുടങ്ങിയവ മാത്രമേ ആവശ്യമായിരുന്നുള്ളൂ. അക്കാലത്ത് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ മാത്രം മതിയായിരുന്നു.
ബി.സി. അയ്യായിരത്തോടടുപ്പിച്ച്, നദീതീരങ്ങളിൽ സ്ഥിരമായി താമസിച്ചുകൊണ്ട് മനുഷ്യർ വ്യാപകമായ കൃഷി തുടങ്ങിയതോടെ, കൃഷിയിടങ്ങൾ തിട്ടപ്പെടുത്താനും, പാർപ്പിടങ്ങൾ പണിയാനുമെല്ലാം പലതരത്തിലുള്ള നീളവും പരപ്പുമെല്ലാം അളക്കേണ്ടതായി വന്നു. ഇക്കാലത്താണ് ഭിന്നസംഖ്യകൾ എന്ന സങ്കേതം ഉണ്ടായത്. പങ്കുവയ്ക്കുമ്പോഴും ഭിന്നസംഖ്യകൾ ആവശ്യമുണ്ടല്ലോ. എല്ലാ അളവുകളേയും ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയില്ല എന്ന തിരിച്ചറിവിൽനിന്നാണ് പുതിയ തരം സംഖ്യകൾ ആവശ്യമായി വന്നത്.
പിൽക്കാലത്ത് ഭൗതികമായ ആവശ്യങ്ങൾക്കല്ലാതെ ഗണിതത്തിന്റെ തന്നെ സൗകര്യങ്ങൾക്കായും പുതിയതരം സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കപ്പെട്ടു. ന്യൂനസംഖ്യകൾ, സങ്കീർണസംഖ്യകൾ (complex numbers) എന്നിവ ഇങ്ങനെ ഉണ്ടായവയാണ്. ഇത്തരം സംഖ്യകൾപോലും ഊർജതന്ത്രം പോലുള്ള മറ്റു ശാസ്ത്രങ്ങളിൽ വളരെയധികം ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നുണ്ട് എന്നത് മറ്റൊരു കാര്യം.

ഇങ്ങനെ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങൾ ആവശ്യമായി വരും.

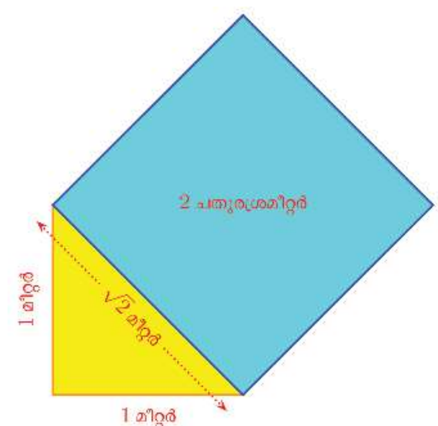
അളവുകളും സംഖ്യകളും

എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ പുതിയ സംഖ്യകളുണ്ടാക്കണം. നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ഉദാഹരണം തന്നെയെടുക്കുക. വശങ്ങളുടെ നീളം 1 ആയ (മീറ്ററോ, സെന്റിമീറ്ററോ എന്തുമാകട്ടെ) സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളത്തെ എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കും?

ഈ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയും ചോദിക്കാം: പരപ്പളവ് 2 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കും?

വശം എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയ സമചതുരമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നീളം പരപ്പളവിന്റെ വർഗമൂലമാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി , പരപ്പളവ് 4 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{4} = 2$; പരപ്പളവ് $2\frac{1}{4}$ ആണെങ്കിൽ, വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$

ഇതുപോലെ പരപ്പളവ് 2 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ എന്നെഴുതാം.



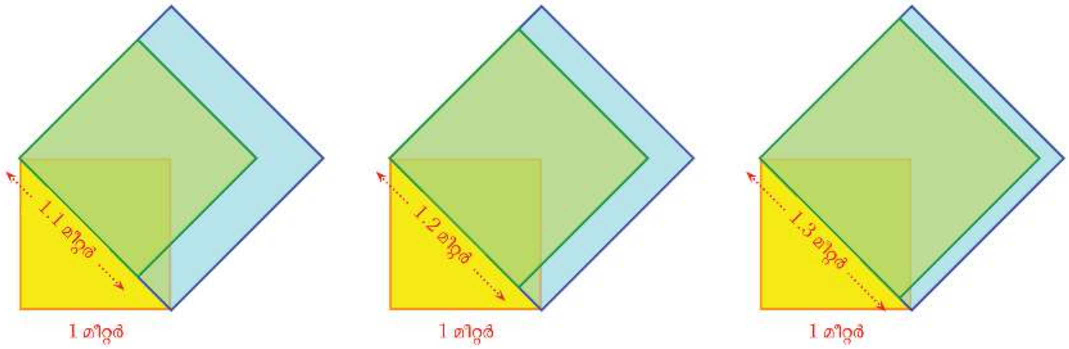
നീളത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഒരു ചിഹ്നം കൊടുത്തതു കൊണ്ടായില്ലല്ലോ. അതിന്റെ വലുപ്പമറിയാൻ, അറിയാവുന്ന നീളങ്ങളുമായി ഒത്തുനോക്കണ്ടേ? അതിനുള്ള വഴി, ഈ നീളത്തോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക എന്നതാണ്. ഇത്തരം നീളങ്ങൾ വികർണത്തിൽത്തന്നെ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ, ഇവ വശങ്ങളായ സമചതുരങ്ങൾ, വികർണം വശമായ സമചതുരത്തോട് അടുക്കുമല്ലോ.

തകരുന്ന വിശ്വാസങ്ങൾ

എല്ലാ അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് താരതമ്യം ചെയ്യാം എന്നായിരുന്നു ബി.സി. ആറാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പൈഥാഗറസിന്റേയും ശിഷ്യരുടേയും വിശ്വാസം. കുറേക്കൂടി കൃത്യമായിപ്പറഞ്ഞാൽ, ഏതു രണ്ട് അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം എന്നതാണ് ഈ വിശ്വാസം. എന്നാൽ, ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റേയും വശത്തിന്റേയും നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എണ്ണൽസംഖ്യകൾകൊണ്ട് എഴുതാൻ സാധ്യമല്ല. ഈ അംശബന്ധം എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് $a : b$ എന്നെഴുതണമെങ്കിൽ, വികർണത്തിന്റെ നീളം വശത്തിന്റെ $\frac{a}{b}$ മടങ്ങാകണം. അങ്ങനെയെങ്കിൽ വികർണത്തിന്റെ വർഗം വശത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ മടങ്ങാകണം. വികർണത്തിലെ സമചതുരം, വശത്തിലെ സമചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായതിനാൽ $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ ആകണം. ഇതു സാധ്യമല്ല എന്നു കണ്ടല്ലോ.

പൈഥാഗറസിന്റെ തന്നെ ശിഷ്യനായ ഹിപ്പാസസ് ആണ് ഈ വസ്തുത കണ്ടെത്തിയതെന്നാണ് കരുതപ്പെടുന്നത്.

സമചതുരത്തിന്റെ വികർണവും വശവും പോലെ, എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് താരതമ്യം ചെയ്യാൻ കഴിയാത്ത അളവുകളെ ഒരുമിച്ചളക്കാൻ കഴിയാത്ത അളവുകൾ (incommensurable magnitudes) എന്നാണ് പറയുന്നത്.



സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാൽ, ഈ വരകളുടെ നീളങ്ങളായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരും.

ഇങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപമാണ് സൗകര്യം. ആദ്യം 1.1, 1.2, 1.3, . . . എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ കണക്കാക്കിയാൽ.

$$1.4^2 = 1.96$$

$$1.5^2 = 2.25$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ പത്തിലൊന്നുകൾ വരെ എടുത്താൽ, ഇങ്ങനെ കിട്ടും.

$$1.4^2 < 2 < 1.5^2$$

ഇനി 1.4 നും 1.5 നും ഇടയ്ക്കുള്ള 1.41, 1.42, 1.43, . . . എന്നീ സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ കണക്കാക്കിയാൽ

$$1.41^2 = 1.9881; \quad 1.42^2 = 2.0164$$

എന്നും കാണാം, അതായത് നൂറിലൊന്നുകൾ വരെ എടുത്താൽ, നേരത്തെ എഴുതിയത് പോലെ,

$$1.41^2 < 2 < 1.42^2$$

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ

1.4^2	=	1.96	1.5^2	=	2.25
1.41^2	=	1.9881	1.42^2	=	2.0164
1.414^2	=	1.999396	1.415^2	=	2.002225
1.4142^2	=	1.99996164	1.4143^2	=	2.00024449
1.41421^2	=	1.9999899241	1.41422^2	=	2.0000182084

എന്നെല്ലാം കാണാം. അതായത്, അഞ്ചു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെയെടുത്താൽ

$$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2$$

ഇതിൽ

$$2 - 1.41421^2 = 0.0000100759 < 0.00002$$

ആണെന്നും കാണണം.

6U4XPK

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

$\frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്.

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

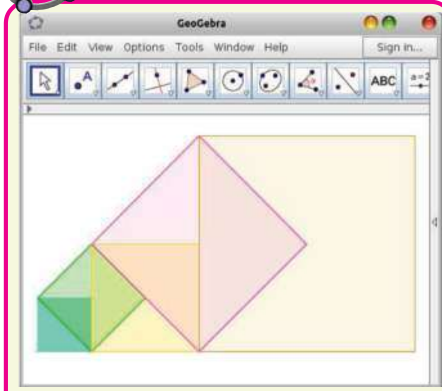
അപ്പോൾ $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യ, ഒരു ദശാംശസ്ഥാനം മാത്രമെടുത്താൽ 1.4, രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെയെടുത്താൽ 1.41 എന്നിങ്ങനെ പറയാം. ഇതെഴുതുന്നത്

$$\sqrt{2} \approx 1.4$$

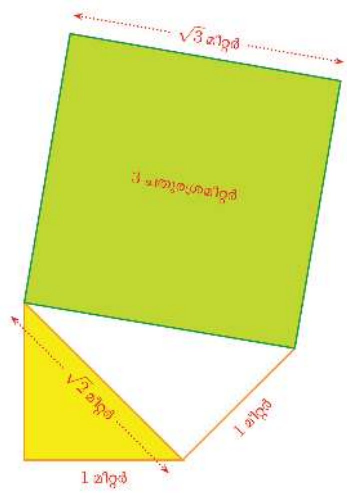
$$\sqrt{2} \approx 1.41$$

എന്നൊക്കെയാണ്. ഇതിൽ ≈ എന്ന ചിഹ്നത്തിന്റെ അർഥം, ഏകദേശം തുല്യം എന്നാണ്.

ഇതുപോലെ പരപ്പളവ് 3 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{3}$ ആണെന്നു പറയാം.



ചിത്രത്തിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഏറ്റവും വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കുക. ഇത്തരം ഒരു ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക. (Regular polygon ഉപയോഗിക്കാം) Area ഉപയോഗിച്ച് ഓരോ സമചതുരത്തിന്റേയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കി നോക്കൂ. ഇതിൽ ഏതൊക്കെ ചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങളാണ് ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയുന്നവ?

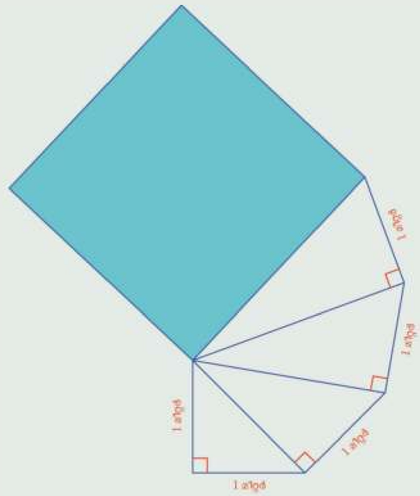


നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലുള്ള കണക്കു കൂട്ടലുകളിലൂടെ, 1.7, 1.73, 1.732, ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 3 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു എന്നും കാണാം. ഇക്കാര്യം ചുരുക്കി $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$ എന്നെഴുതാം.

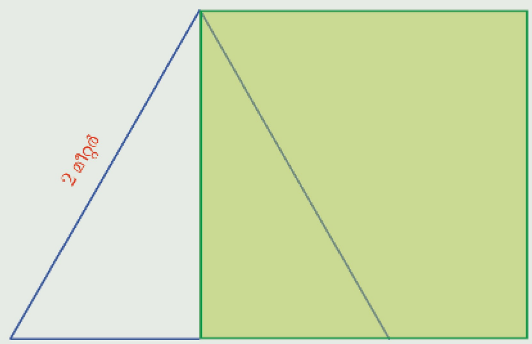
പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ x ഏത് അധിസംഖ്യ ആയാലും, പരപ്പളവ് x ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{x}$ എന്നെഴുതാം. ചിലപ്പോൾ $\sqrt{x}$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആകാം; അല്ലെങ്കിൽ, വർഗം x നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന, ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കി, $\sqrt{x}$ നെ ദശാംശരൂപത്തിലും എഴുതാം.

(1) ചിത്രത്തിൽ ഏറ്റവും മുകളിലെ മട്ട ത്രികോണത്തിന്റെ കർണം വശമാക്കി സമചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കുക.



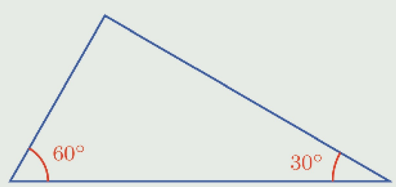
(2) വശങ്ങളുടെ നീളം 2 മീറ്റർ ആയ ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി വശമാക്കി ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നു.



i) സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്?

ii) ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി എത്ര മീറ്ററാണ്?

iii) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളമെത്രയാണ്?



(3) ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയെയും രണ്ടു പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാമെന്ന് എട്ടാം ക്ലാസിലെ സർവസമവാക്യങ്ങൾ എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ. ഇതുപയോഗിച്ച് 7 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ, 11 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നീ പരപ്പളവുകളുള്ള സമചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

(4) 13 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാനുള്ള രണ്ടു വ്യത്യസ്ത മാർഗങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുക.

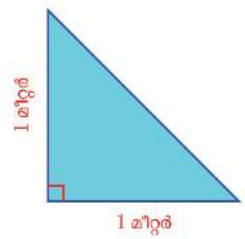
(5) $\sqrt{2}$ നേക്കാൾ വലുതും, $\sqrt{3}$ നേക്കാൾ ചെറുതുമായ മൂന്നു ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

NT-503-4-MATHS-9-M-VOL.1

കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും

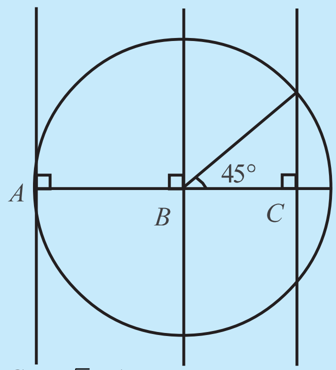
ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം 1 മീറ്ററായ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?

ചുറ്റളവോ?



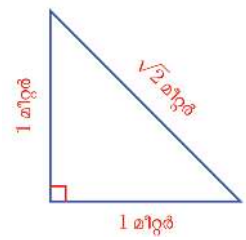
അങ്ങനെയും അംശബന്ധം

ഈ ചിത്രത്തിൽ B വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ്.



$AB : BC = \sqrt{2} : 1$

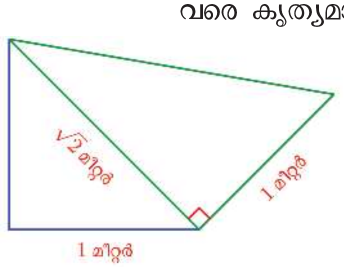
ഇതിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്ററാണല്ലോ.



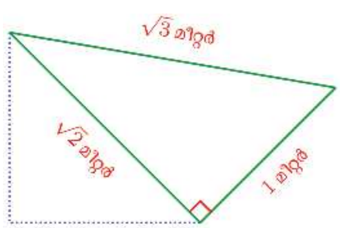
അപ്പോൾ ചുറ്റളവ് കിട്ടാൻ 2 മീറ്ററും $\sqrt{2}$ മീറ്ററും കൂട്ടണം. ഈ നീളത്തെ $2 + \sqrt{2}$ മീറ്റർ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

$\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ 1.4, 1.41, 1.414, ...എന്നിങ്ങനെ തുടരുമല്ലോ. അപ്പോൾ $2 + \sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ, ഇവയോടെല്ലാം 2 കൂട്ടിയതാണ്; അതായത്, 3.4, 3.41, 3.414, ... എന്നീ ഭിന്നസംഖ്യകൾ.

ഈ കണക്കിൽ, സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായ അളവ് മതിയെന്നു തീരുമാനിച്ചാൽ ചുറ്റളവ് 3.41 മീറ്റർ എന്നെടുക്കാം. ഇനി അതല്ല, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമാകണമെന്നുണ്ടെങ്കിൽ 3.414 മീറ്റർ എന്നെടുക്കണം.



ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണം പാദമാക്കി ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ മറ്റൊരു മട്ടത്രികോണമുണ്ടാക്കിയാലോ?



ഇതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{3}$ മീറ്റർ എന്നു കണ്ടല്ലോ.

ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ് $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ മീറ്റർ എന്നെഴുതാം.

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടാൻ, ഇവ ഓരോന്നിനോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ക്രമമായി കൂട്ടണം:

$\sqrt{2}$	:	1.4	1.41	1.414
$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	:	3.1	3.14	3.146

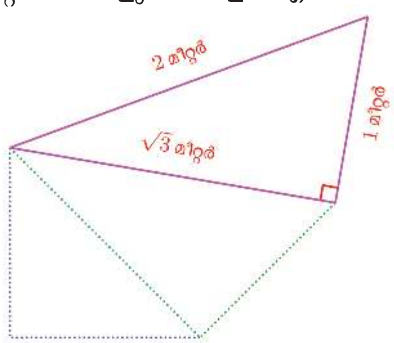
ഇവയോട് 1 കൂട്ടിയാൽ $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയുടെ ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടും.

അപ്പോൾ പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി 4.146 മീറ്റർ.

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്? ഏകദേശം $4.146 - 3.414 = 0.732$ മീറ്റർ എന്നു പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{3}-2 = \sqrt{3}-1 \approx 0.732$$

ഇനി ഈ ത്രികോണത്തിന്റെയും മുകളിൽ ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണം വരച്ചാലോ? അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?



ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ്, രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്?

പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $2+1+\sqrt{3} = 3+\sqrt{3}$ മീറ്റർ. ഇതിനോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാതെതന്നെ ചുറ്റളവ് എത്ര കൂടുതലാണെന്ന് നോക്കാം.

രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ മീറ്റർ ആണല്ലോ; അപ്പോൾ ചുറ്റളവിലെ വ്യത്യാസം

$$(3+\sqrt{3}) - (1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2-\sqrt{2}$$

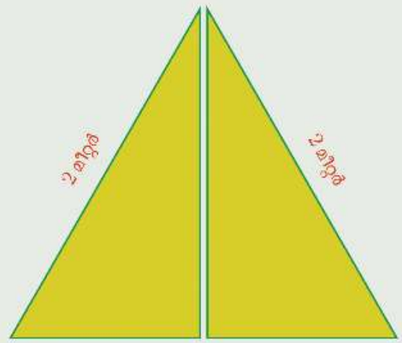
ഇത് മൂന്നു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കൃത്യമായി

$$2 - 1.414 = 0.586$$

എന്നു കണക്കാക്കാം. അതായത്, ഏകദേശം 586 മില്ലിമീറ്റർ (അഥവാ 58.6 സെന്റിമീറ്റർ) കൂടുതലാണ്.

(1) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം $1\frac{1}{2}$ മീറ്ററും, മറ്റൊരു വശം $\frac{1}{2}$ മീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ ചുറ്റളവ്, സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.

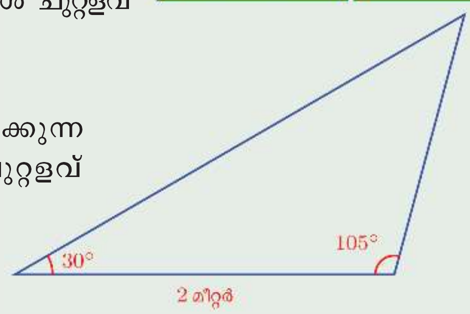
(2) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിനെ ഒരു മൂലയിലൂടെ മുറിച്ച് രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കിയതാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



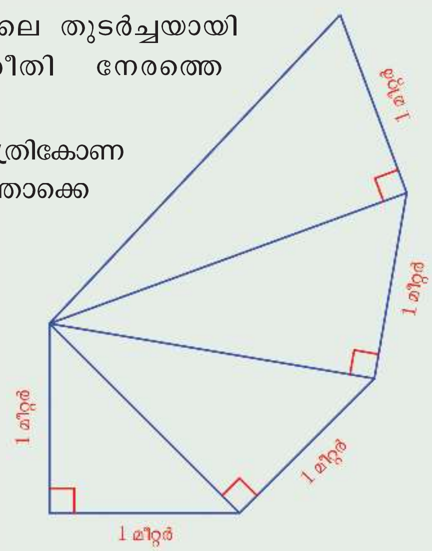
i) ഇവയിലൊന്നിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്? (കഴിഞ്ഞ ഭാഗത്തിന്റെ അവസാനമുള്ള രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യം നോക്കുക)

ii) മുഴുവൻ ത്രികോണത്തേക്കാൾ ചുറ്റളവ് എത്ര കുറഞ്ഞു?

(3) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.



(4) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ തുടർച്ചയായി മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്ന രീതി നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.



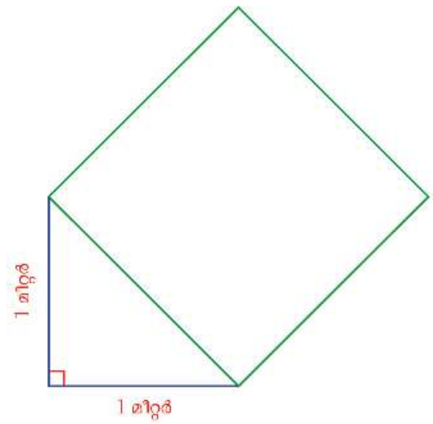
i) ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന പത്താമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയാണ്?

ii) പത്താമത്തെ ത്രികോണത്തിന് ഒമ്പതാമത്തെ ത്രികോണത്തേക്കാൾ ചുറ്റളവ് എത്ര കൂടുതലാണ്?

iii) ബീജഗണിതഭാഷയിൽ, n-ാം ത്രികോണത്തിന്റെയും, അതിനു തൊട്ടു മുമ്പുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെയും ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എങ്ങനെ എഴുതാം?

(5) ലംബവശങ്ങൾ $\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്ററും, $\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്ററും ആയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം എത്രയാണ്? ലംബവശങ്ങളുടെ തുക കർണത്തെക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്?

ഗുണനം



തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രം പല തവണ കണ്ടുകഴിഞ്ഞല്ലോ, ഇതിലെ സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്?

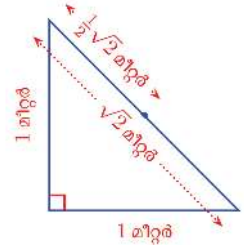
അതിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെയും നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്ററാണെന്നറിയാം, അപ്പോൾ ചുറ്റളവ് കിട്ടാൻ ഇതിന്റെ നാലു മടങ്ങ് കണക്കാക്കിയാൽ മതി.

മറ്റു സംഖ്യകളിലെന്നപോലെ $\sqrt{2}$ ന്റെ 4 മടങ്ങിനെയും $4 \times \sqrt{2}$ എന്നെഴുതാം. ഇതു സാധാരണയായി ഗുണനചിഹ്നം ഇല്ലാതെ, $4\sqrt{2}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

ഈ സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ നാലു മടങ്ങ് എടുക്കണം.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായെടുത്താൽ,

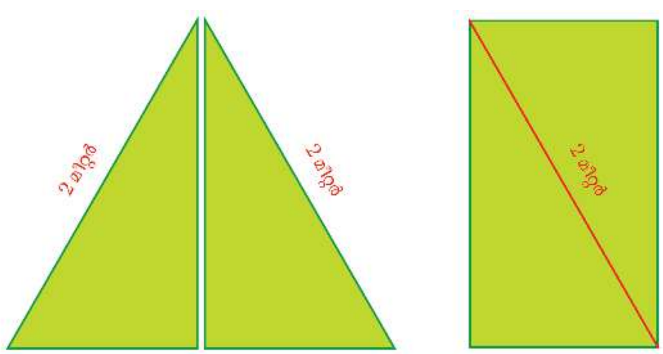
$$4 \times 1.414 = 5.656 \text{ മീറ്റർ}$$



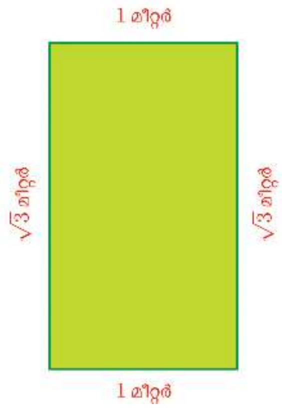
ഇതുപോലെ $\sqrt{2}$ ന്റെ പകുതിയെ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

$\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ പകുതി എടുത്താൽ, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടും. അതായത്, $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.7071\ldots$

ഇനി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക:



ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തെ തുല്യമായ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളായി മുറിച്ച്, മാറ്റിയടുക്കി ഒരു ചതുരമാക്കിയിരിക്കുന്നു.



ഈ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്?

മട്ടത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഓരോന്നിന്റെയും പാദം 1 മീറ്ററാണ്; ഉയരം $\sqrt{3}$ മീറ്ററാണെന്ന് മുമ്പൊരു കണക്കിൽ കണ്ടിട്ടുമുണ്ട്.

അപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് $2\sqrt{3} + 2$ മീറ്റർ

ഈ സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732 . . .
$2\sqrt{3}$	:	3.4	3.46	3.464 . . .
$2\sqrt{3}+2$	:	5.4	5.46	5.464 . . .

മറ്റു സംഖ്യകളിലേതുപോലെ ഇവിടെയും $2\sqrt{3} + 2$ ഉം $2(\sqrt{3}+1)$ ഉം ഒന്നു തന്നെയാണോ? രണ്ടാമത് പറഞ്ഞ സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്ന സംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732 . . .
$\sqrt{3}+1$	:	2.7	2.73	2.732 . . .
$2\left(\sqrt{3}+1\right)$	:	5.4	5.46	5.464 . . .

അതായത്, $2\sqrt{3}+2$ എന്ന സംഖ്യയോടും $2(\sqrt{3}+1)$ എന്ന സംഖ്യയോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഒന്നുതന്നെയാണ്: അപ്പോൾ

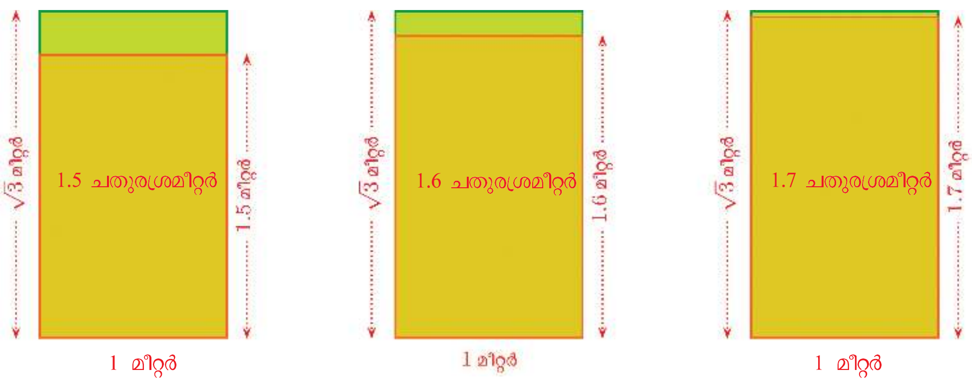
$$2\sqrt{3}+2 = 2(\sqrt{3}+1)$$

ഇനി മുകളിലെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്ററാണെന്ന് നോക്കാം.

വശങ്ങളുടെ നീളം ഭിന്നസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ ഗുണനഫലമാണ് പരപ്പളവ്.

ഇവിടെയും പരപ്പളവ്, വശങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായ $1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണോ?

ഇതുകാണാൻ, മുമ്പൊരിക്കൽ ചെയ്തതുപോലെ, ഒരു വശം 1 മീറ്ററും മറ്റേ വശം $\sqrt{3}$ മീറ്ററിനോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യാനീളങ്ങളും ആയ ചതുരങ്ങൾ ഇതിനുള്ളിൽ വരച്ചു നോക്കാം:



തുടർന്ന് അകത്തെ ചതുരങ്ങളുടെ ഉയരങ്ങൾ 1.73, 1.732,. . .എന്നിങ്ങനെ മീറ്റർ ആയി എടുക്കുമ്പോൾ അവയുടെ പരപ്പളവുകളും ഇതേ സംഖ്യകൾ ചതുരശ്രമീറ്ററിലായി കിട്ടും.

അതായത്, വശങ്ങളുടെ നീളം $\sqrt{3}$മീറ്ററും 1 മീറ്ററുമായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\sqrt{3}$ ചതുരശ്രമീറ്റർതന്നെയാണ്.

ഇനി ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ എന്നായാലോ? ഈ പരപ്പളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ടാണ്. ഇതിനെ സംഖ്യാപരമായി വിശദീകരിക്കാൻ, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ എന്നിവയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ക്രമമായി ഗുണിച്ച് വേണ്ടത്ര ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ എടുക്കണം.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732	1.7320	1.73205 . . .
$\sqrt{2}$	:	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421 . . .
$\sqrt{3} \times \sqrt{2}$	:	2.4	2.44	2.449	2.4494	2.44948 . . .

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = 2.44948\ldots$$

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യമുണ്ട് 1.4^2, 1.41^2, 1.414^2, 1.4142^2, . . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നു കണ്ടല്ലോ. ($\sqrt{2} = 1.41421\ldots$ എന്നെഴുതുന്നതിന്റെ അർഥംതന്നെ ഇതല്ലേ?) 1.7^2, 1.73^2,1.732^2, 1.7320^2, 1.73205^2,. . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന വർഗങ്ങൾ 3 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നും കണ്ടു.

അപ്പോൾ ഈ വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം 6 നോട് അടുത്തടുത്തു വരണമല്ലോ?

മാത്രവുമല്ല, ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമായതിനാൽ

ദശാംശക്കണക്ക്

ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെ ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനം വരെ ചുരുക്കിയെഴുതുമ്പോൾ, അടുത്ത സ്ഥാനത്തെ അക്കം അഞ്ചോ, അഞ്ചിൽ ക്കൂടുതലോ ആണെങ്കിൽ, നമുക്കു വേണ്ട സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയാണ് എടുക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി $1.7 \times 1.4 = 2.38$ ആയതിനാൽ, ഈ ഗുണനഫലത്തെ ഒരു ദശാംശസ്ഥാനത്തേക്ക് ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് 2.4 എന്നാണ്.

$$1.7^2 \times 1.4^2 = (1.7 \times 1.4)^2$$

$$1.73^2 \times 1.41^2 = (1.73 \times 1.41)^2$$

$$1.732^2 \times 1.414^2 = (1.732 \times 1.414)^2$$

എന്നെല്ലാം കാണാം. ഇതിലെ 1.7×1.4, 1.73×1.41 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഗുണനഫലങ്ങൾ പട്ടികയിലെ അവസാന വരിയിൽ കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അപ്പോൾ 2 നോടും, 3 നോടും, 6 നോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

3	:	1.7^2	1.73^2	1.732^2	1.7320^2	$1.73205^2 \ldots$
2	:	1.4^2	1.41^2	1.414^2	1.4142^2	$1.41421^2 \ldots$
6	:	2.4^2	2.44^2	2.449^2	2.4494^2	$2.44948^2 \ldots$

ഇതിലെ അവസാനവരിയിൽ എന്താണ് കാണുന്നത്?

2.4, 2.44, 2.449, 2.4494, 2.44948, . . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 6 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

പുതിയ സംഖ്യകളുടെ നിർവചനമനുസരിച്ച്, ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\sqrt{6} = 2.44948 \ldots$$

$\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയും ഇതുതന്നെയാണെന്ന് നേരത്തേ കണ്ടു. അപ്പോൾ

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

2 നും 3 നും പകരം മറ്റു സംഖ്യകളെടുത്താലും, ഇതുപോലെതന്നെ വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമൂലമാണെന്നു കാണാം (വർഗമൂലങ്ങൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആണെങ്കിൽ ഇതു ശരിയാണെന്ന് എഴാംക്ലാസിൽതന്നെ കണ്ടിട്ടുണ്ട്.)

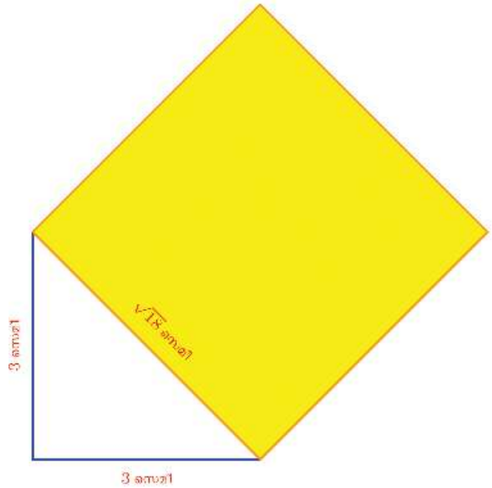
x, y എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

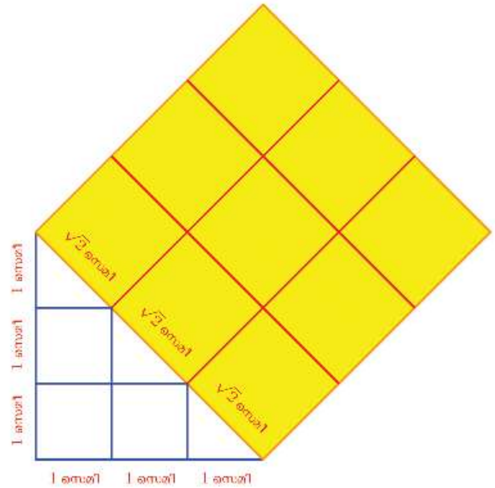
വർഗമൂലങ്ങൾ ലഘൂകരിച്ചെഴുതാൻ ഇതുപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ലംബവശങ്ങൾ രണ്ടും 3 സെന്റിമീറ്ററായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളം നോക്കാം. പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, ഈ കർണം വശമായ സമചതുരത്തിന്റ പരപ്പളവ് $3^2 + 3^2 = 18$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ കർണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{18}$ സെന്റിമീറ്റർ.

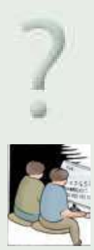
ഇനി 18 നെ 9×2 എന്നെഴുതിയാൽ ഇത് ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

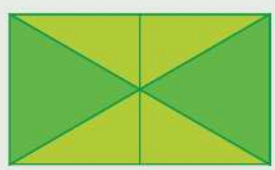
ഇക്കാര്യം ജ്യാമിതീയമായും കാണാം.







(1) ഒരേ വലുപ്പമുള്ള നാലു സമഭുജത്രികോണങ്ങളിൽ രണ്ടെണ്ണം നെടുകെ മുറിച്ചതും, രണ്ടെണ്ണം മുഴുവനായും ചേർത്തുവച്ച് ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കി.

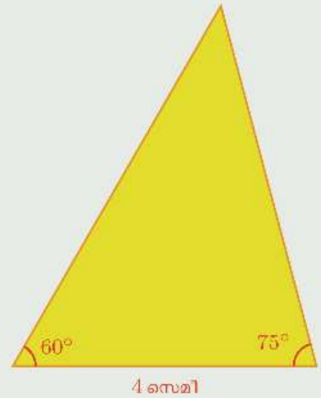


സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം 1 മീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, പരപ്പളവും എത്രയാണ്?

(2) ഒരു സമചതുരവും, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് നീളമുള്ള വശങ്ങളോടുകൂടിയ ഒരു സമഭുജത്രികോണവും ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ മുറിച്ചു മാറ്റിയടുക്കി ഒരു ലംബകമുണ്ടാക്കുന്നു.

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, ലംബകത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും എത്രയാണ്?

(3) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക.



(4) ചുവടെയുള്ള സംഖ്യാജോടികളിൽ ഗുണനഫലം എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$ ii) $\sqrt{3}$, $\sqrt{1.2}$ iii) $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$

iv) $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{8}$ v) $\sqrt{7\frac{1}{2}}$, $\sqrt{3\frac{1}{3}}$

ഹരണം

$2 \times 3 = 6$ എന്ന ഗുണനത്തിനെ $\frac{6}{2} = 3$ എന്നോ, $\frac{6}{3} = 2$ എന്നോ ഹരണമായും എഴുതാമല്ലോ. ഇതുപോലെ $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ എന്ന ഗുണനത്തെയും ഹരണമായി എഴുതാം.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയ ഏത് x, y എടുത്താലും $x \times y = z$ എന്ന ഗുണനത്തിനെ $\frac{z}{x} = y$ എന്നും $\frac{z}{y} = x$ എന്നും ഹരണമായി എഴുതാം.

ഇതുപോലെ,

x, y എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും,

$$\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{z}$$

എന്ന ഗുണനത്തെ ഹരണമായി

$$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} = \sqrt{y} \quad , \quad \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}$$ **എന്നെഴുതാം.**

ഇനി $\frac{6}{2} = 3$ ഉം, $\frac{6}{3} = 2$ ഉം ആയതിനാൽ

$$\sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3} \qquad \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

എന്നും കാണാം. നേരത്തെ കണ്ടതെന്താണ്?

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

ഈ രണ്ടു ജോടി സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}}$$

എന്നെല്ലാം കാണാം;

ഇതുപോലെ $3 \times \frac{2}{3} = 2$ എന്നതിൽ നിന്ന്

$$\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{3 \times \frac{2}{3}} = \sqrt{2}$$

എന്നും തുടർന്ന് ഈ ഗുണനത്തെ ഹരണമായി

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$ എന്നും എഴുതാം

ഇനി ഇത്തരം വർഗമൂലങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

ഉദാഹരണമായി $\sqrt{\frac{1}{2}}$ കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യം

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

എന്നെഴുതാം, തുടർന്ന് $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഏതെങ്കിലും ദശാംശസംഖ്യകൊണ്ട് ഒന്നിനെ ഹരിച്ച് $\frac{1}{\sqrt{2}}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപം കണക്കാക്കാം.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1.414} = 0.707$$ (കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ചോളൂ.)

മറ്റൊരു എളുപ്പവഴിയുണ്ട്: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ആയതിനാൽ ഇങ്ങനെ കണക്കുകൂട്ടാം.

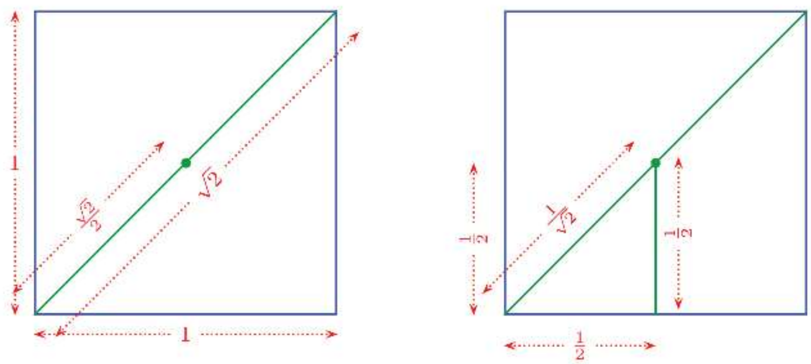
$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ഇനി

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1.414}{2} = 0.707$$ (ഇതിന് കാൽക്കുലേറ്റർ വേണ്ടല്ലോ?)

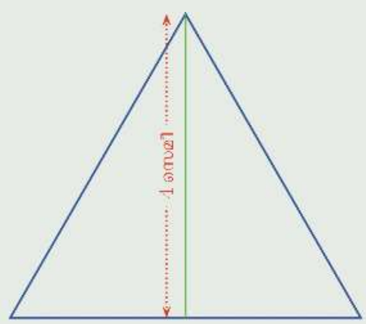
എന്നു എളുപ്പത്തിൽ കാണാമല്ലോ.

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ എന്നത്, ജ്യാമിതീയമായും കാണാം



ഇതുപോലെ $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ഉം കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

(1) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.



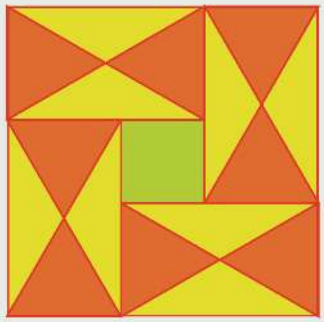
(2) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ എന്നു തെളിയിക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച്, $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

(4) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ ലഘൂകരിച്ചെഴുതുക. അതുപയോഗിച്ച് $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ഇവ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

(5) $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ എന്നും $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$ എന്നും തെളിയിക്കുക. ഇതുപോലുള്ള മറ്റു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

(6) ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളെല്ലാം സമഭുജമാണ്.



പുറത്തെ സമചതുരത്തിന്റെയും, അകത്തെ സമചതുരത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

അനുബന്ധം

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല എന്നു തെളിയിക്കാൻ അത്തരം ഭിന്നസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ശ്രമം വിജയിക്കില്ല എന്നു സമർഥിക്കുക യാണ് ചെയ്യുന്നത്.

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയ്ക്കും പല രൂപങ്ങളുണ്ടല്ലോ, അംശത്തിനും ഛേദത്തിനും പൊതുവായ ഘടകങ്ങളില്ലാത്ത ഏറ്റവും ലളിതമായ ലഘുരൂപവുമുണ്ട്. വർഗം 2 ആയ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാൻ അത്തരമൊരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ലഘുരൂപത്തിന്റെ അംശവും ഛേദവും എങ്ങനെയായിരിക്കണമെന്നു നോക്കാം. അവ p, q എന്നെടുത്താൽ $\frac{p^2}{q^2} = 2$ ആകണം, p, q ഇവയ്ക്ക് പൊതുവായി ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടാകാനും പാടില്ല.

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

എന്നതിനെ

$$p^2 = 2q^2$$

എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ p^2 ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാകണം ($2q^2$ ഇരട്ടസംഖ്യയാണല്ലോ). ഒറ്റസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗം ഒറ്റസംഖ്യകളും (ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗം ഇരട്ടസംഖ്യകളും) ആയതിനാൽ, p തന്നെ ഇരട്ടസംഖ്യയാകണം. ഇനി, p, q ഇവയ്ക്ക് പൊതുഘടകമൊന്നും ഇല്ലാത്തതിനാൽ q ഒറ്റ സംഖ്യയാകണം

p ഇരട്ടസംഖ്യ ആയതിനാൽ അതിനെ $2k$ എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ $p^2 = 2q^2$ എന്ന സമവാക്യം $4k^2 = 2q^2$ എന്നാകും. ഇതിൽ

$$q^2 = 2k^2$$

എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ q^2 ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. p യുടെ കാര്യത്തിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ, ഇതിൽ നിന്ന് q തന്നെ ഇരട്ടസംഖ്യയാണെന്നും വരും.

ആദ്യം കണ്ടത് q ഒറ്റ സംഖ്യയാണെന്നല്ലേ? അപ്പോൾ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം 2 ആകണമെങ്കിൽ അതിന്റെ ലഘുരൂപത്തിൽ ഛേദം ഒറ്റസംഖ്യയും ഇരട്ടസംഖ്യയും ആകണം. ഇതു സാധ്യമല്ലല്ലോ. അതായത് വർഗം 2 ആയ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയും ഇല്ല.

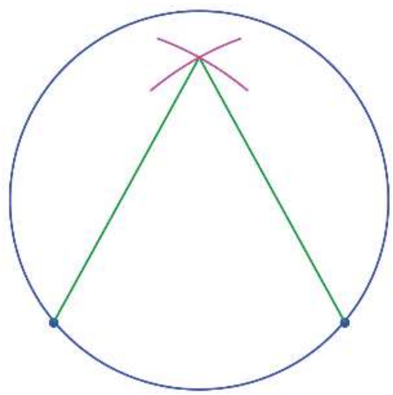
വൃത്തങ്ങൾ

വൃത്തങ്ങളും വരകളും

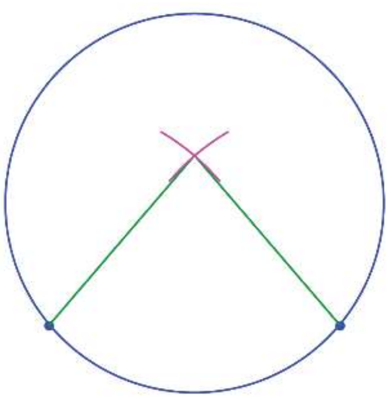
വളയോ ചെറിയൊരു വട്ടപ്പാത്രത്തിന്റെ അടപ്പോ, നോട്ടുബുക്കിൽവച്ചൊരു വട്ടം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ കേന്ദ്രമെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

വൃത്തത്തിലെ ഏതു സ്ഥാനത്തുനിന്നും കേന്ദ്രത്തിലേക്ക് ഒരേ അകലമാണ്.

അപ്പോൾ ഈ വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ അവ രണ്ടിൽനിന്നും ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് കേന്ദ്രം. എങ്ങനെയാണ് അത്തരമൊരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുക?



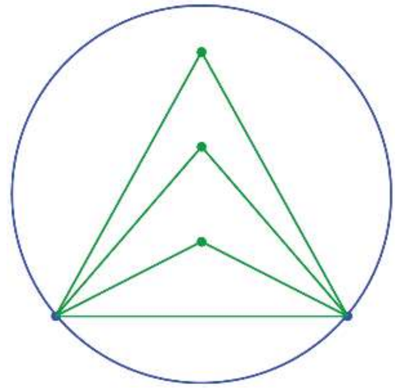
ഇത് കേന്ദ്രത്തിനു മേലെയായി, അകലമൽപ്പം കുറച്ചെടുത്താലോ?



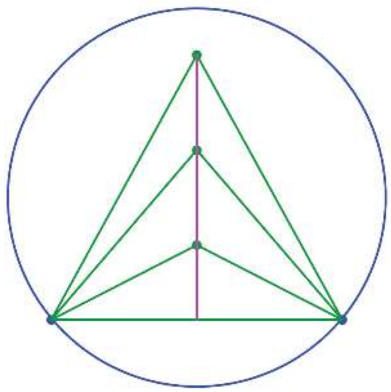
ഇപ്പോഴുമത്ര ശരിയായില്ല. ഇങ്ങനെ തെറ്റിയും തിരുത്തിയും വരച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നതിനു പകരം, പ്രശ്നത്തെക്കുറിച്ച് അൽപമൊന്ന് ആലോചിക്കാം.

വൃത്തത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിൽ അനേകം ബിന്ദുക്കളുണ്ട്. അവയിലേതാണ് കേന്ദ്രമെന്ന് മുൻകൂട്ടി നിശ്ചയിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ആ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര പാദമായ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെ മൂന്നാം മൂലകളല്ലേ?



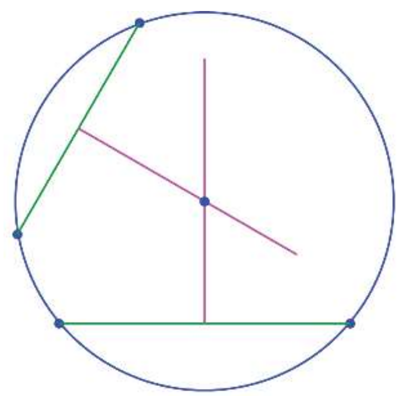
ഇങ്ങനെയുള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം, പാദത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയിലാണെന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ട്; (എട്ടാംക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠം)



അപ്പോൾ നമ്മളന്വേഷിക്കുന്ന വൃത്തകേന്ദ്രം, വൃത്തത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലാണെന്നു കിട്ടി.

അതുകൊണ്ടായില്ലല്ലോ; ഈ വരയിലെ വിടെയാണ് കേന്ദ്രമെന്നറിയണ്ടേ?

വൃത്തത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താൽ, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലുമായിരിക്കണം കേന്ദ്രം; രണ്ടു വരകളിലും ആകണമെന്നതിനാൽ, അവ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുതന്നെ കേന്ദ്രം:



ജോലി കഴിഞ്ഞു; ഇനി അതിൽനിന്നറിഞ്ഞത് ഓർത്തുവയ്ക്കാം.

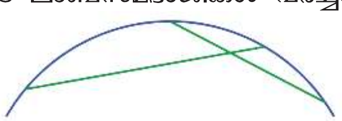
വൃത്തത്തിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെയും ലംബസമഭാജി, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും.

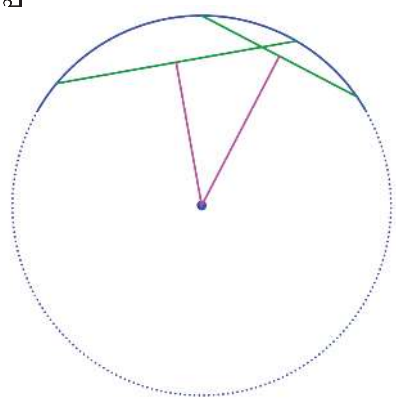
"വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര" എന്നു നീട്ടിപ്പറയുന്നതിനു പകരം, അത്തരം വരകൾക്കെല്ലാം ഒരു പേരു കൊടുക്കാറുണ്ട്.

(ഏറെ ആലോചിക്കുകയും, അവസാനമെല്ലാം ചുരുക്കിപ്പറയുകയുമാണല്ലോ കണക്കിന്റെ രീതി). വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഒരു വരയെ പൊതുവായി **ഞാൺ (chord)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ നേരത്തെ പറഞ്ഞ തത്വം ഇങ്ങനെയാക്കാം.

വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണിന്റെയും ലംബസമഭാജി, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും.

ഇനി വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം മാത്രം (ഉദാഹരണമായി, ഒരു വളക്കഷണം) കിട്ടിയാലും, ഇതുപോലെ വൃത്തകേന്ദ്രവും അതുവഴി മുഴുവൻ വൃത്തവും കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. ഈ കഷണത്തിൽ രണ്ടു ഞാണുകൾ വരച്ച്, അവയുടെ ലംബസമഭാജികൾ വരച്ചാൽപ്പോരേ?



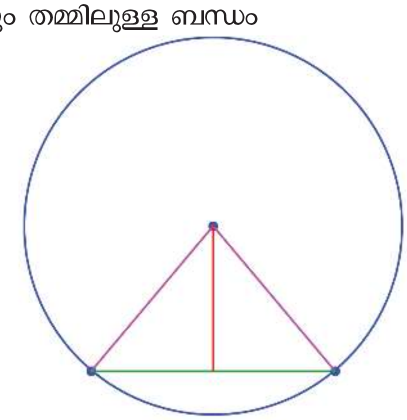


ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് ഒരു ഞാൺ വരച്ച് അതിന്റെ ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കുക. ഈ വര കേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നില്ലേ? ഞാണിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

ഞാണിന്റെ അറ്റങ്ങളും വൃത്തകേന്ദ്രവും ചേർന്നൊരു സമപാർശ്വത്രികോണമാകും എന്നതിൽനിന്നാണ് മുകളിൽപ്പറഞ്ഞ തത്വത്തിലെത്തിയത്.

സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ പാദവും മൂന്നാം മൂലയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പലതരത്തിൽപ്പറയാമെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടു:

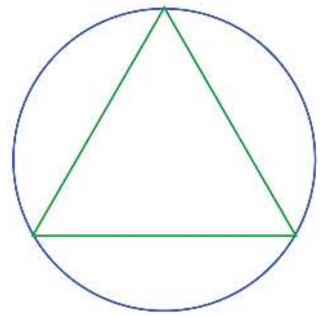
- മൂന്നാംമൂലയിൽനിന്നുള്ള ലംബം, പാദത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.
- മൂന്നാംമൂലയും പാദത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, പാദത്തിനു ലംബമാണ്.
- പാദത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയിലാണ് മൂന്നാംമൂല.



ഇതിൽ അവസാനം പറഞ്ഞതിൽ പാദം വൃത്തത്തിലെ ഞാണും, മൂന്നാംമൂല വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി എടുത്തതാണ് നമ്മുടെ വൃത്തതത്വം. ഇതുപോലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു ത്രികോണതത്വങ്ങളും വൃത്തതത്വങ്ങളായി മാറ്റിയെഴുതാമല്ലോ.

വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബം, ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.

വൃത്തകേന്ദ്രവും ഞാണിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ഞാണിനു ലംബമാണ്.



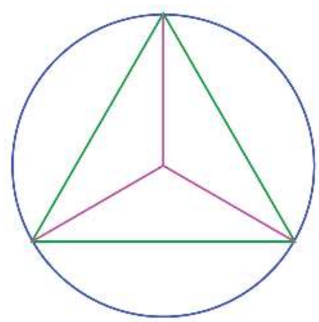
മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം: ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, അതിനുള്ളിലൊരു സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കണം; ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം വൃത്തത്തിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കണം.

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകളാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഒരേ നീളമുള്ള മൂന്നു ഞാണുകൾ, ഓരോ ജോടിയും വൃത്തത്തിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതരത്തിൽ വരച്ചാൽമതി.

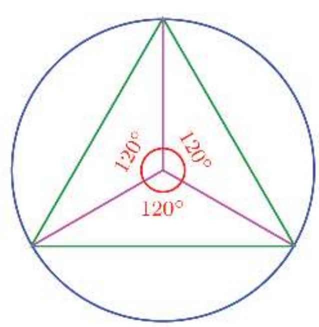
ഒരേ നീളത്തിൽ രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വരയ്ക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. പക്ഷേ, ഇവയുടെ മറ്റേ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാണിന് ഈ നീളമാകണമെന്നില്ലല്ലോ.

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ഞാൺതന്നെ ആലോചിച്ചു വരയ്ക്കണം. സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശമായ ഞാണിന്റെ സവിശേഷത എന്താണെന്നു നോക്കാം.

ഇത്തരമൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ വൃത്തകേന്ദ്രമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന കോണുകളുടെ അളവെന്താണ്?

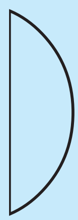


സമഭുജത്രികോണത്തിനകത്തുള്ള മൂന്നു ചെറുത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേപോലെയല്ലേ? അതുകൊണ്ട് അവയുടെ കോണുകളും തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ ചിത്രത്തിലെ മൂന്നു ആരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള കോണുകൾ എന്താണ്?



ഞാണും ചരടും

ഒരു വില്ലിന്റെ അറ്റങ്ങൾ തമ്മിൽ വലിച്ചു കെട്ടുന്ന ചരടിനെയാണ് സാധാരണയായി “ഞാൺ” എന്നു പറയുന്നത്. ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വൃത്തഭാഗവും വരയും നോക്കിയാൽ ഏതാണ്ട് ഒരു വില്ലുപോലെ തോന്നുമല്ലോ.

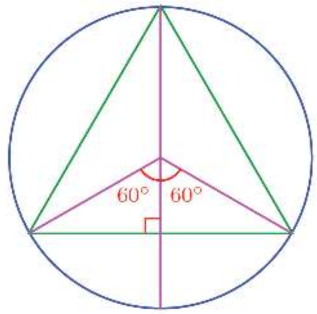


വൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ എന്നത് ഈ വില്ലിലെ ചരടിന്റെ സ്ഥാനത്താണുതാനും.

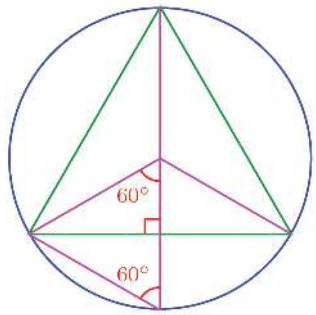
സംസ്കൃതത്തിലെ “ജ്യാ” എന്ന വാക്കിൽ നിന്നാണ് “ഞാൺ” എന്ന മലയാള വാക്കുണ്ടായത്. പ്രാചീന ഭാരതത്തിലെ ഗണിതശാസ്ത്രഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ “ജ്യാ” എന്ന സംസ്കൃത പദമാണ് ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഇംഗ്ലീഷിലെ Chord എന്ന വാക്ക്, ലാറ്റിൻ ഭാഷയിലെ Chorda എന്ന വാക്കിൽ നിന്നാണ് വന്നത്. കയറ് എന്നാണിതിന്റെ അർത്ഥം. ചരട് എന്നതിന് ഇപ്പോൾ ഇംഗ്ലീഷിൽ Cord എന്ന വാക്കാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

അതായത് വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ, 120° ഇടവിട്ട് മൂന്ന് ആരങ്ങൾ വരച്ചാൽ, അവയുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച് സമഭുജത്രികോണമാക്കാം.



കോണുകളൊന്നും വരയ്ക്കാതെ ഇതു ചെയ്യാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. അത് കാണാൻ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു ലംബമായ ആരം വരയ്ക്കുക. ഇത് ആ വശത്തിനെയും, അതിനെതിരെയുള്ള കോണിനെയും സമഭാഗം ചെയ്യുമല്ലോ (കാരണം?).



ഇനി ഈ ആരവും ലംബമായ വശത്തിന്റെ അറ്റവും യോജിപ്പിച്ചാലോ? ചെറിയൊരു സമഭുജത്രികോണം കിട്ടില്ലേ? (അതെങ്ങനെ?):

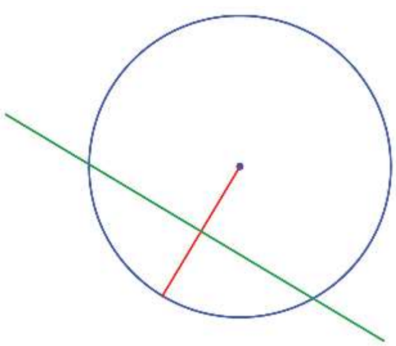
വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം, ഈ ചെറിയ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽനിന്ന് എതിർവശത്തേക്കുള്ള ലംബമാണ്; അതിനാൽ അത്, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഈ വശത്തിനെ സമഭാഗം ചെയ്യും.

അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

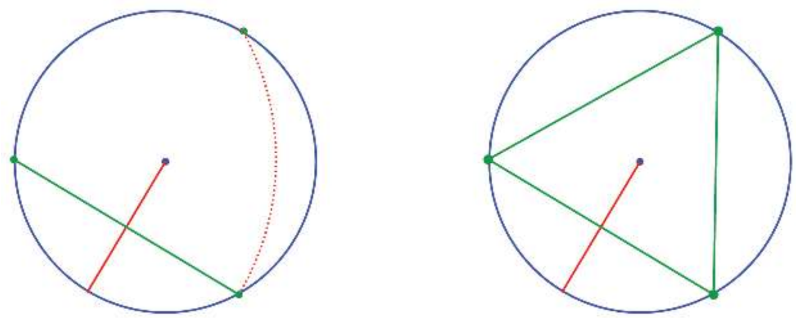
വൃത്തത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശവും, അതിനു ലംബമായ ആരത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യും; അഥവാ, ഈ ആരത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയാണ്.

വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ ഒരു എളുപ്പവഴി ആയില്ലേ?

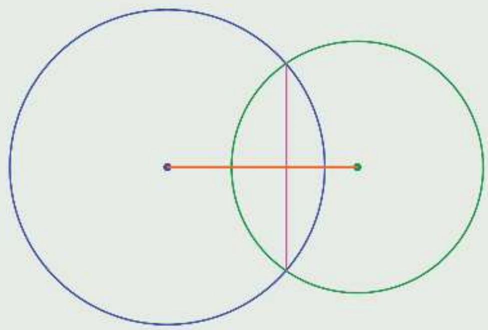
വൃത്തത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ആരത്തിന് ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കുക.



ഈ വര വൃത്തത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന ഞാണാണ്, സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം. ഇതിന്റെ ഒരറ്റത്തുനിന്ന്, മറ്റേ അറ്റത്തിന്റെ അകലത്തിൽത്തന്നെ ഒരു ബിന്ദു കൂടി വൃത്തത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ മൂന്നാം മൂലയുമായി.



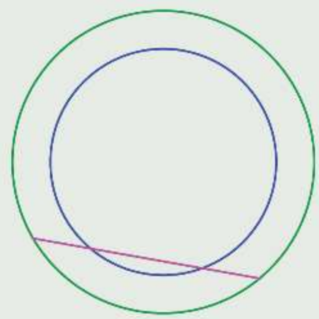
(1) രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



ഒരേ കേന്ദ്രമുള്ള രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ പുറമെയുള്ള വൃത്തത്തിന് AB എന്ന ഒരു ഞാൺ വരയ്ക്കുക. ഈ വര അകത്തെ വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ C, D ഇവ അടയാളപ്പെടുത്തുക. AC, DB എന്നീ നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ നീളങ്ങൾ തുല്യമാണോ? A, B ഇവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

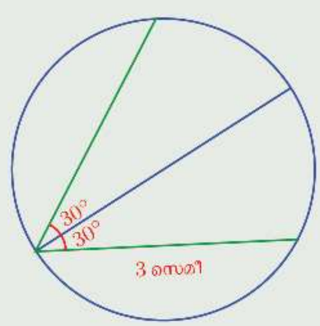
(2) ഒരേ കേന്ദ്രമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളും, ഒരു വരയുമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്;

വരയുടെ ഇരുഭാഗത്തും, വൃത്തങ്ങൾക്കിടയിലെ ഭാഗങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

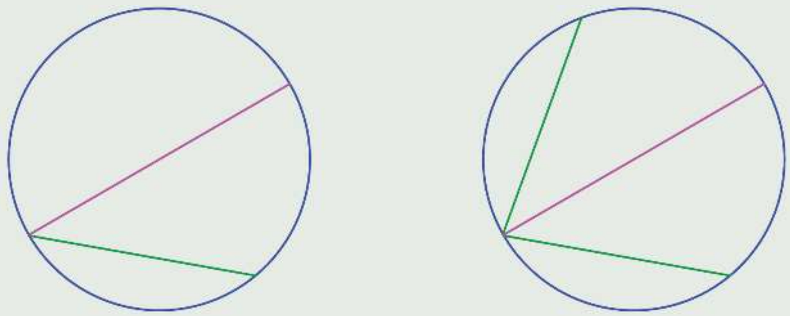


(3) ചിത്രത്തിൽ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ ഇരുവശത്തുമായി രണ്ടു ഞാണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.

രണ്ടാമത്തെ ഞാണിന്റെ നീളം എന്താണ്?



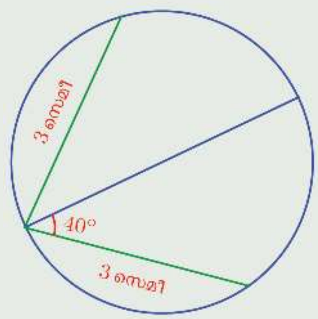
(4) വൃത്തത്തിൽ ഒരു ഞാണും, അതിന്റെ ഒരറ്റത്തുകൂടി ഒരു വ്യാസവും വരയ്ക്കുന്നു. വ്യാസത്തിന്റെ മറുഭാഗത്ത്, ഇതേ ചരിവിൽ മറ്റൊരു ഞാണും വരയ്ക്കുന്നു.



ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

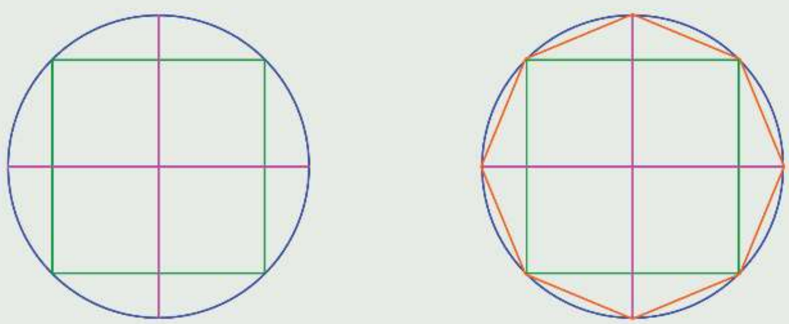
(5) ചിത്രത്തിൽ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന് മുകളിലും താഴെയുമായി രണ്ടു ഞാണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.

മുകളിലെ ഞാൺ വ്യാസവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ എന്താണ്?



(6) വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു വരയ്ക്കുന്ന ഒരേ നീളമുള്ള ഞാണുകൾ ചേരുന്ന കോണിനെ, ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസം സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

(7) ഒരു സമചതുരവും, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിലൂടെയുള്ള വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ വ്യാസങ്ങൾ വൃത്തത്തെ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളും, സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകളും യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക.

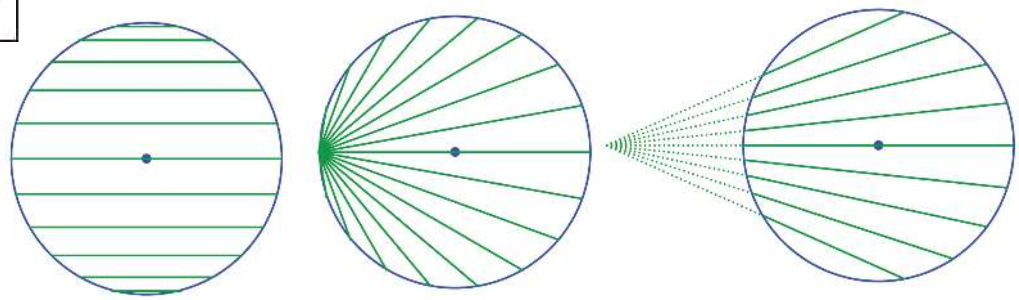


ഇതൊരു സമഅഷ്ടഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക

തുല്യഞാണുകൾ

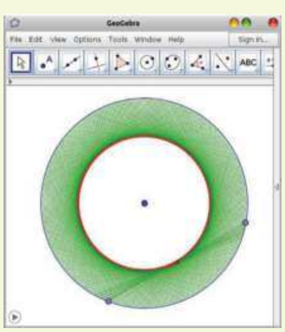
വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഞാണുകളാണ് വ്യാസങ്ങൾ, ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏറ്റവും നീളംകൂടിയ ഞാണുകളും വ്യാസങ്ങൾതന്നെ.

കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും അകലുംതോറും, ഞാണിന്റെ നീളം കുറഞ്ഞുവരും:

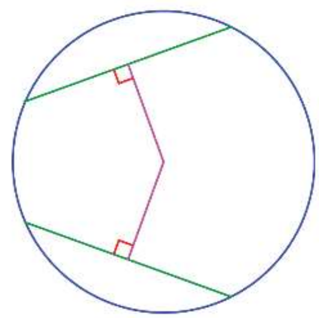


നിരങ്ങിനീങ്ങിയാലും കറങ്ങിനീങ്ങിയാലും, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു കാണുന്നില്ലേ?

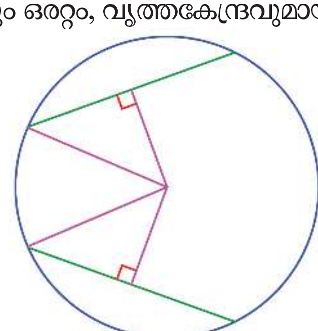
ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് ഒരു ഞാൺ വരയ്ക്കുക. ഈ ഞാണിന്റെ മധ്യബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി Trace On നൽകുക. ഞാണിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾക്ക് Animation നൽകി നോക്കൂ. ഞാണിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത എന്താണ്? എന്തുകൊണ്ടാണിങ്ങനെ? ഞാണിന് Trace On നൽകി നോക്കൂ. ഞാണിന് നിറം നൽകി ചിത്രം മനോഹരമാക്കുകയുമാവാം.



ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ ലംബദൂരത്തിലുള്ള രണ്ടു ഞാണുകൾ. ഇവയ്ക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു കാണിക്കാൻ, ഓരോന്നിന്റെയും ഒരറ്റം, വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുക.



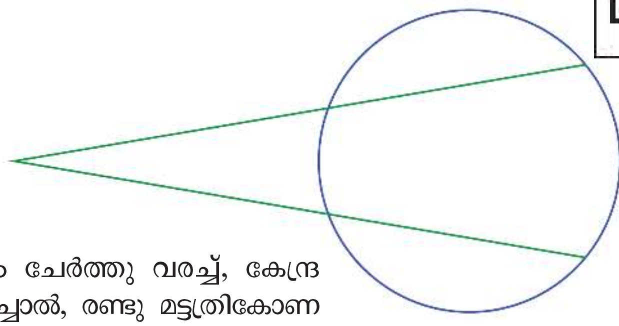
ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ കർണങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങളാകയാൽ തുല്യമാണ്; ഒരു ജോടി ലംബവശങ്ങൾ തുല്യമാണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടുമുണ്ട്. അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് തത്വമനുസരിച്ച്, മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബം മുറിച്ച കഷണങ്ങളായതിനാൽ, ഈ മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങൾ ഞാണുകളുടെ പകുതിയാണ്, അങ്ങനെ ഞാണുകളുടെ പകുതികൾ തുല്യമാണെന്നു കാണാം; ഞാണുകളും.

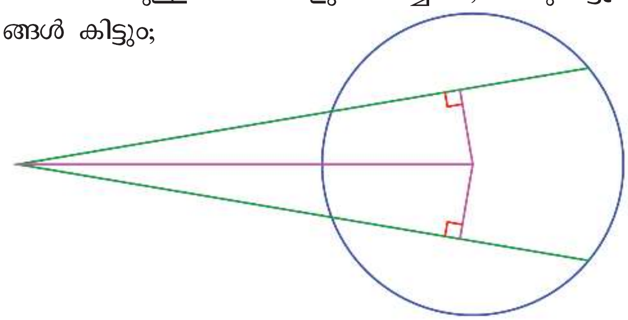
വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.

മറിച്ച്, ഞാണുകൾ തുല്യമാണ് എന്നെടുത്തു തുടങ്ങിയാൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങളും തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കാമോ? ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ.

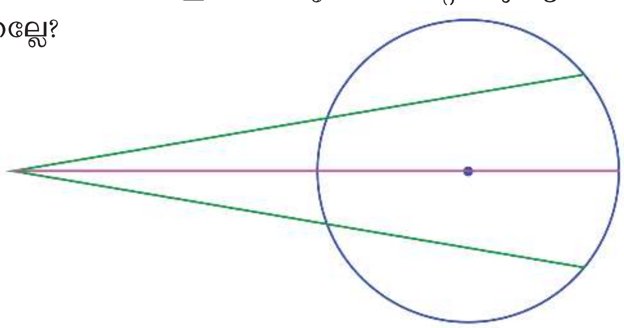
ഇതുപയോഗിച്ചൊരു കണക്കുനോക്കാം. വലതുവശത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ഒരേ നീളമുള്ള രണ്ടു ഞാണുകൾ നീട്ടി, വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ മുട്ടിക്കുന്നു.



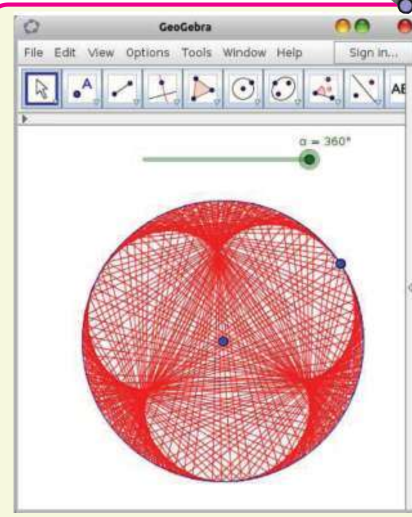
ഈ ബിന്ദുവും, വൃത്തകേന്ദ്രവും ചേർത്തു വരച്ച്, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബങ്ങളും വരച്ചാൽ, രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടും;



രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെയും കർണം ഒരേ വരയാണ്. ഞാണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള അകലങ്ങളും തുല്യമാണ്. അങ്ങനെ ത്രികോണങ്ങളുടെ ഒരു ജോടി ലംബവശങ്ങളും തുല്യമായി. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഇവയുടെ കോണുകളും തുല്യമാണ്; അതായത്, വൃത്തകേന്ദ്രവും, ഞാണുകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, നീട്ടിവരച്ച ഞാണുകൾക്കിടയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജിയാണ്. ഈ വര വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസം നീട്ടിയതല്ലേ?



വൃത്തത്തിൽത്തന്നെ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ഒരേ നീളമുള്ള ഞാണുകൾ ചേരുന്ന കോണിനെ, ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസം സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്ന് നേരത്തെ ഒരു കണക്കിൽ കണ്ടല്ലോ. കൂട്ടിമുട്ടുന്നത് വൃത്തത്തിനു പുറത്താണെങ്കിലും ഇത് ശരിയാണെന്ന് ഇപ്പോൾ കണ്ടു.



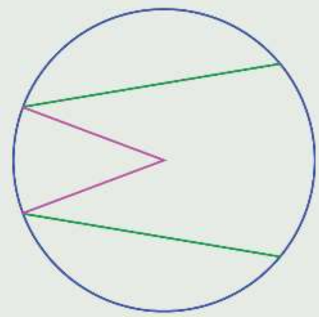
ഇത്തരം ചിത്രങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. A കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ B എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഒരു Angle slider α നിർമിക്കുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B, A എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ α എന്ന് നൽകുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു B' ലഭിക്കും. ഇതുപോലെ $\angle B'AB'' = \alpha$ വരത്തക്കവിധം മറ്റൊരു ബിന്ദു B'' വൃത്തത്തിൽ നിർമിക്കുക. B', B'' എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാൺ വരച്ച് Trace On നൽകുക. സ്ലൈഡറിന് Animation നൽകി നോക്കൂ. $\angle B'AB'' = \alpha$ എന്നതിന് പകരം 2α, 3α, 4α, ... എന്നിങ്ങനെ നൽകി നോക്കൂ. 3α എന്ന് നൽകുമ്പോഴുള്ള ചിത്രമാണ് മുകളിൽ.

(1) വൃത്തത്തിലെ ഒരേ നീളമുള്ള ഞാണുകളെല്ലാം കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(2) വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന രണ്ടു ഞാണുകൾക്കിടയിലുള്ള കോണിനെ ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു. ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

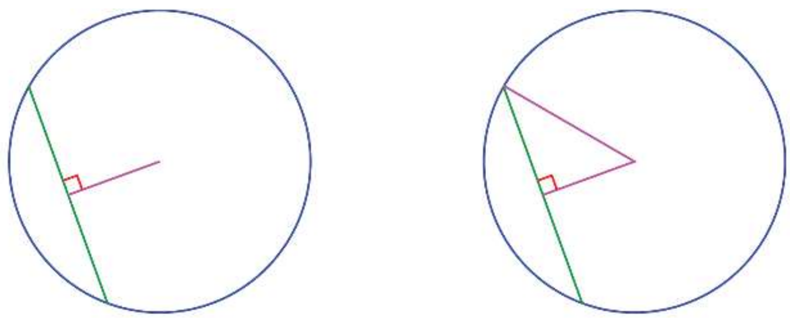
(3) ചിത്രത്തിൽ, ആരങ്ങളും ഞാണുകളും തമ്മിലുള്ള കോണുകൾ തുല്യമാണ്.

ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



ഞാണുകളുടെ നീളം

കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള അകലമാണ്, ഞാണുകളുടെ നീളം നിശ്ചയിക്കുന്നതെന്നു കണ്ടല്ലോ. അതിന്റെ കണക്കെന്താണെന്നു നോക്കാം.



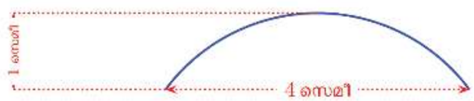
മുകളിലെ ഇടത്തെ ചിത്രത്തിൽ, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണും, അതിലേയ്ക്ക് വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബവും ആണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്; വലത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ഞാണിന്റെ ഒരറ്റം വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ച് ഒരു മട്ടത്രികോണമുണ്ടാക്കിയതും.

ഈ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം വൃത്തത്തിന്റെ ആരവും, ഒരു ലംബവശം വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബവും, മൂന്നാമത്തെ വശം ഞാണിന്റെ പകുതിയുമാണല്ലോ. അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് തത്വമുപയോഗിച്ച്, ഞാണിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗം കണക്കാക്കാം;

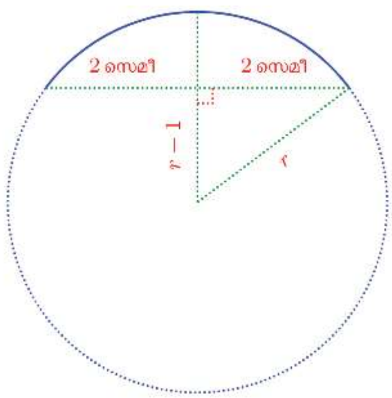
വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണിന്റെയും പകുതിയുടെ വർഗം, ആരത്തിന്റെയും കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നു ഞാണിലേയ്ക്കുള്ള ലംബദൂരത്തിന്റെയും വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമാണ്.

ഉദാഹരണമായി, ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് (ലംബമായി) 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ഞാണിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗം $4^2 - 3^2 = 7$; അപ്പോൾ ഞാണിന്റെ നീളം $2\sqrt{7}$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി ഈ കണക്കുനോക്കൂ: ഒരു വളക്കഷണത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 4 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം, 1 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്:



മുഴുവൻ വളയുടെ ആരം കണക്കാക്കണം. ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മുഴുവൻ വള സങ്കൽപിക്കാം;



വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, ചിത്രത്തിലെ മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$r^2 - (r-1)^2 = 4$$

എന്നു കാണാം. ഇതു ലഘൂകരിച്ചാൽ $2r - 1 = 4$ എന്നും, അതിൽ നിന്ന് $r = 2\frac{1}{2}$ എന്നും കിട്ടും; അതായത്, വളയുടെ ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ.

താമരക്കണക്ക്

ഭാസ്കരാചാര്യരുടെ **ലീലാവതി** എന്ന ഗണിതപുസ്തകത്തെക്കുറിച്ച് കേട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. അതിലെ ഒരു ശ്ലോകത്തിന്റെ വിവർത്തനം ഇങ്ങനെയാണ്:

"ചക്രവാകപ്പക്ഷികളും, ക്രൗഞ്ചപ്പക്ഷികളും കളിയാടുന്ന ഒരു തടാകത്തിൽ, അര കൈപ്പാട് ഉയരത്തിൽ ഒരു താമര മൊട്ട് ഉയർന്നു നില്ക്കുന്നു. കാറ്റത്ത് മെല്ലെ ആടി, അത് രണ്ടു കൈപ്പാട് അകലെയായി ജലത്തിൽ മുങ്ങി. വേഗം പറയൂ, കണക്കുകാരാ, തടാകത്തിന്റെ ആഴമെത്ര?"

ചക്രക്രൗഞ്ചാകുലിതസലിലേ
ക്വാപിദൃഷ്ടം തഡാഗേ
തോയാമൂർദ്ധ്വം കമലകലികാഗ്രം
വിതസ്തതിപ്രമാണം
മന്ദം മന്ദം ചലിതമനിലേനാഹതം
ഹസ്തയുഗ്മം
തസ്മിന്മഗ്നം ഗണക, കഥയ
ക്ഷിപ്രമംഭ: പ്രമാണം

വളയുടെ ആരം കണ്ടുപിടിച്ച രീതിയിൽ ഈ കണക്കിന് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

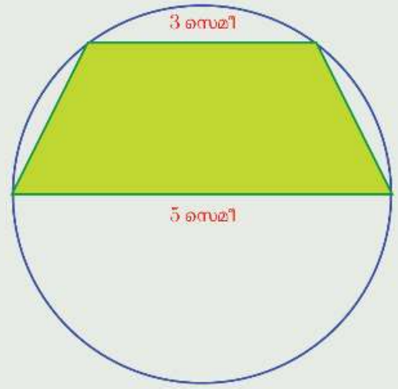
?

(1) ഒരു വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ഞാണിന്റെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററാണ്. കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് 2 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ഞാണിന്റെ നീളമെത്രയാണ്?

(2) ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസത്തിന് ഇരുവശത്തുമായി, 6, 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള സമാന്തര ഞാണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലമെത്രയാണ്? ഇതേ നീളമുള്ള സമാന്തര ഞാണുകൾ, വ്യാസത്തിന്റെ ഒരേ വശത്തു വരച്ചാൽ, അവ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്തായിരിക്കും?

(3) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിൽ താഴത്തെ വശം വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും, മുകളിലെത്തെ വശം അതിനു സമാന്തരമായ ഞാണുമാണ്.

ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



(4) ഒരു വൃത്തത്തിൽ, 4 സെന്റിമീറ്ററും 6 സെന്റിമീറ്ററും നീളമുള്ള സമാന്തരമായ രണ്ടു ഞാണുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 5 സെന്റിമീറ്ററാണ്. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?

ബിന്ദുക്കളും വൃത്തങ്ങളും

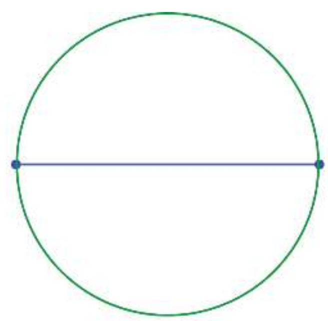
വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകളെക്കുറിച്ചാണ് ഇത്രയും നേരം പറഞ്ഞുകൊണ്ടിരുന്നത്; ഇനി മറിച്ചൊരു ചോദ്യം, ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും അവ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വര വരയ്ക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം. ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

നോട്ടുബുക്കിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ?

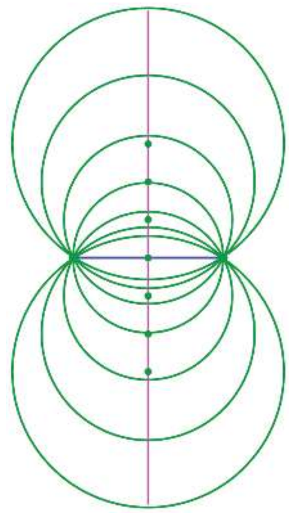
വളരെയെളുപ്പം ചെയ്യാവുന്നത്, ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായി വൃത്തം വരയ്ക്കുകയാണ്;

മറ്റൊരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ?



അങ്ങനെയൊരു വൃത്തം വരച്ചാൽ, ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, അതിന്റെ ഞാണാകും, അപ്പോൾ വൃത്തകേന്ദ്രം, ഈ വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലായിരിക്കണം.

ലംബസമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദുവും കേന്ദ്രമായി ആദ്യത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ.

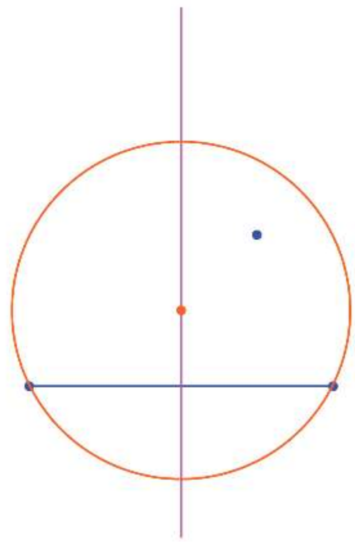


ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വരയും അതിന്റെ ലംബസമഭാജിയും വരയ്ക്കുക. ലംബസമഭാജിയിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി, വരയുടെ ഒരു അഗ്രബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിന് Animation നൽകി നോക്കൂ. വൃത്തത്തിന് Trace On നൽകാവുന്നതാണ്.

അപ്പോൾ പുതിയൊരു ചോദ്യം; ഏതെങ്കിലും മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെങ്കിൽ സാധിക്കില്ല.

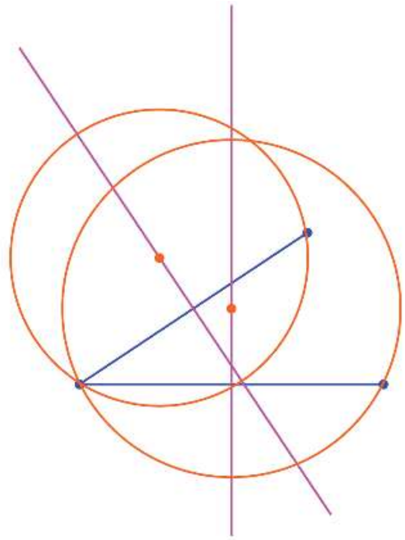
ഒരേ വരയിലല്ലെങ്കിലോ?



വരയ്ക്കാൻ തുടങ്ങുന്നതിനു മുമ്പ് അൽപമൊന്നാലോചിക്കാം.

ഇതിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായെടുത്താലും, ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ജോടി ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബ സമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായെടുത്താലും അവയിലൂടെയുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

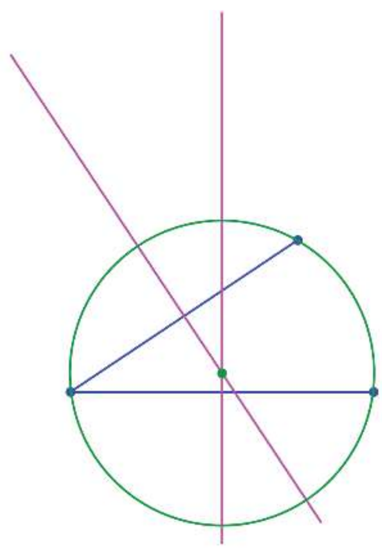


അങ്ങനെ രണ്ടു ജോടി ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി കടന്നുപോകുന്ന രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

പക്ഷേ, നമുക്കു വേണ്ടത്, മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും കടന്നു പോകുന്ന ഒറ്റ വൃത്തമല്ലേ?

ആദ്യമെടുത്ത ഒരു ജോടി ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വൃത്തം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രം ആദ്യത്തെ സമഭാജിയിലായിരിക്കണം. രണ്ടാമത്തെ ജോടിയിലൂടെയുള്ള വൃത്തം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രം രണ്ടാമത്തെ സമഭാജിയിലുമായിരിക്കണം.

രണ്ടു സമഭാജിയിലുമുള്ള ബിന്ദു എടുത്താലോ? അതായത്, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു?



വരയും വട്ടവും

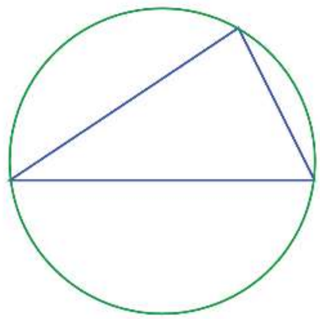
ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന എത്ര വരകൾ വേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാം. അതു പോലെ വൃത്തങ്ങളും.

രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ഒരു വര മാത്ര മല്ലേ വരയ്ക്കാൻ കഴിയുള്ളൂ? പക്ഷേ, വൃത്തങ്ങൾ എത്രവേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാം.

ഏതു മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും വര വരയ്ക്കാൻ കഴിയണമെന്നില്ല. അങ്ങനെ വര വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ അവയിലൂടെ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കയില്ല. വര വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കാത്ത മൂന്നു ബിന്ദുക്കളായാലോ, അവയിലൂടെ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

ഏതെങ്കിലും നാലു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ വര വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ? വൃത്തമോ?

മിച്ചമുള്ള ഒരു ജോടി ബിന്ദുക്കളുംകൂടി യോജിപ്പിച്ചാൽ ഒരു ത്രികോണമാകും; വൃത്തം അതിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിലൂടെയും കടന്നുപോകും;



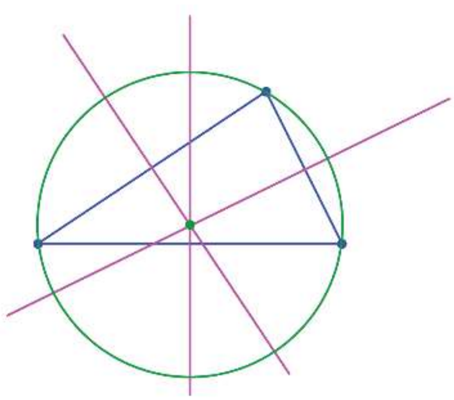
ഇങ്ങനെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ **പരിവൃത്തം (circumcircle)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇപ്പോൾ ചെയ്തതുപോലെ, ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും രണ്ടു വശങ്ങളുടെ ലംബസമഭാജികൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി, മൂന്നു മൂലകളിലൂടെയുമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ Circle Through 3 Points ഉപയോഗിക്കാം. ഇതുപയോഗിച്ച് ബിന്ദുക്കളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി.

ഒരു Angle Slider α നിർമിച്ച് ഒരു കോൺ α ആയി ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക. Midpoint or Centre ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തകേന്ദ്രം അടയാളപ്പെടുത്താം. Slider നീക്കി α മാറ്റുമ്പോൾ പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിന്റെ സ്ഥാനം മാറുന്നത് നോക്കൂ. പരിവൃത്തകേന്ദ്രം ത്രികോണത്തിനകത്ത് വരുന്നതെപ്പോഴാണ്? പുറത്ത് വരുന്നതോ? ഇത് എപ്പോഴെങ്കിലും ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും വശത്ത് വരുമോ?

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കാണാം. ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെയും, ഇടതു വശത്തിന്റെയും ലംബസമഭാജികൾ വരച്ചാണ് പരിവൃത്തകേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിച്ചത്. വലതു വശം പരിവൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ ലംബസമഭാജിയും പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും.



6VP8ZG

ഏതു ത്രികോണത്തിലും മൂന്നു വശങ്ങളുടെയും ലംബസമഭാജികൾ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു.

(1) രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 4, 5 സെന്റിമീറ്ററായും അവ ചേരുന്ന കോൺ 60°, 90°, 120° ഇവയിലൊന്നായും ഓരോ ത്രികോണം വരച്ച്, അവയുടെയെല്ലാം പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക. (പരിവൃത്തത്തിന്റെ സ്ഥാനം മാറുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക)

(2) ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യമായ വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററും, പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്; അതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

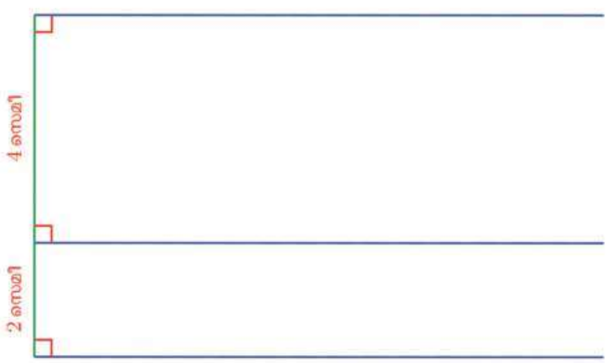
(3) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവും, പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണക്കാക്കുക.

6 സമാന്തരവരകൾ

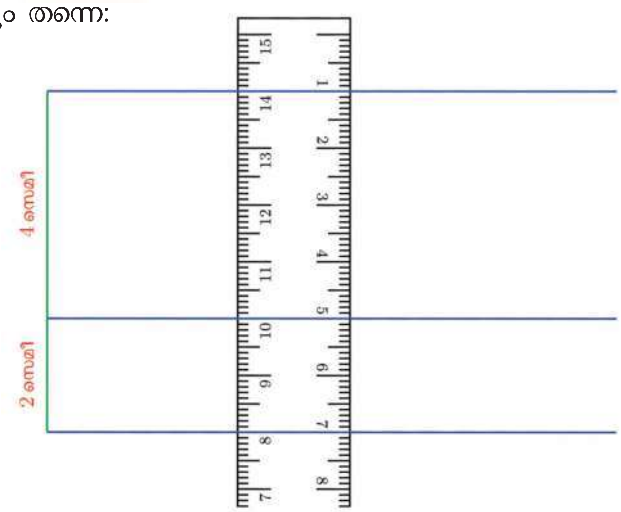
സമാന്തരഭാഗം

സമാന്തരവരകളെക്കുറിച്ച് പലതും പഠിച്ചു; അവയുപയോഗിച്ച് പലതും വരച്ചു. സമാന്തരവിശേഷങ്ങൾ ഇനിയുമുണ്ട് പലതും.

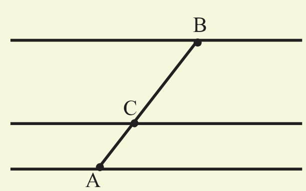
ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു വരയും, അതിനു സമാന്തരമായി 2 സെന്റിമീറ്റർ താഴെ ഒരു വരയും, 4 സെന്റിമീറ്റർ മുകളിൽ സമാന്തരമായിത്തന്നെ മറ്റൊരു വരയും വരച്ചു തുടങ്ങാം:



ഇനി താഴത്തെ വരയിൽ എവിടെനിന്നും കുത്തനെ അളന്നാൽ, വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 2 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററും തന്നെ:

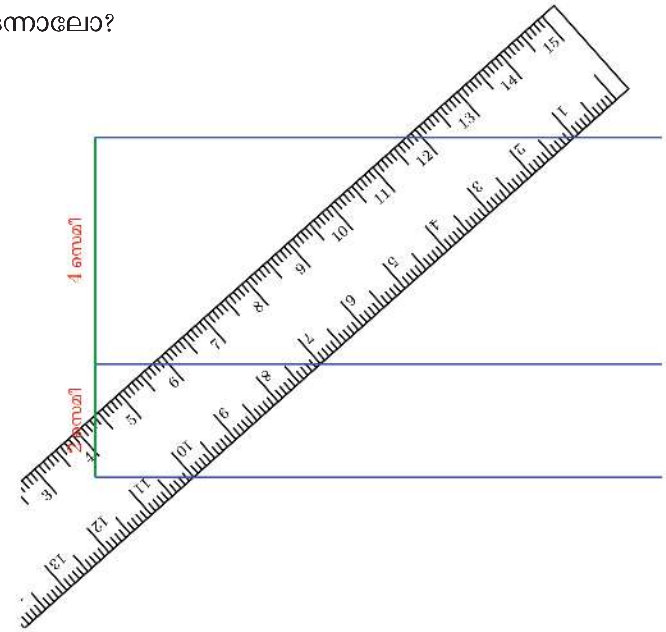


ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു വര വരച്ച് അതിന്റെ ഒരു വശത്ത് അകലം 2 ആയി ഒരു വരയും മറു വശത്ത് അകലം 4 ആയി മറ്റൊരു വരയും വരയ്ക്കുക (ഗ്രിഡ് ഉപയോഗിക്കാം). A, B എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ ഓരോ വരകളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക.



AC, BC എന്നിവയുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? A, B ഇവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. സമാന്തര വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലവും മാറ്റി നോക്കൂ.

ചരിച്ചളന്നാലോ?

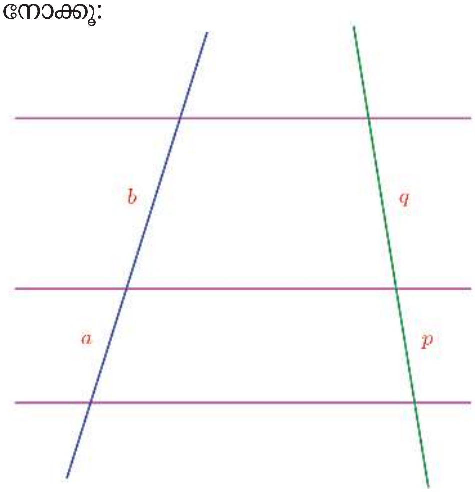


സ്കേലിന്റെ വലതുവക്ക് നോക്കൂ; ഈ ചരിവിൽ വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയാണ്?

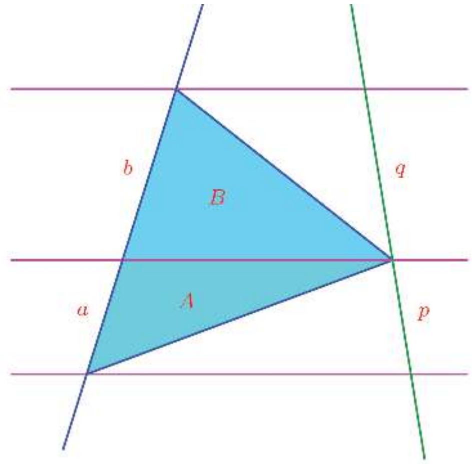
ഇനിയും പല രീതിയിൽ ചരിച്ചുവച്ചു നോക്കൂ; എന്താണ് കാണുന്നത്? എങ്ങനെ അളന്നാലും, ഏറ്റവും താഴത്തെ വരയും നടുവിലെ വരയും തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങുതന്നെയല്ലേ, നടുവിലെ വരയും ഏറ്റവും മുകളിലെ വരയും തമ്മിലുള്ള അകലം?

മറ്റൊരുരീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, കുത്തനെയുള്ള അകലങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണ് ഏതു ചരിവിലുമുള്ള അകലങ്ങളുടേതും.

എങ്ങനെ മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ വരച്ചാലും ഇതു ശരിയാണോ എന്നു നോക്കാം. ആദ്യം നമ്മുടെ ഊഹമെന്താണെന്ന് കുറേക്കൂടി വ്യക്തമാക്കാം. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



വിലങ്ങനെ മൂന്നു സമാന്തര വരകൾ; അവയെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന രണ്ടു ചരിഞ്ഞ വരകൾ. ഇടതു വരയെ സമാന്തരവരകൾ മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന കഷണങ്ങളുടെ നീളം a, b എന്നും, വലതു വരയെ സമാന്തരവരകൾ മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന കഷണങ്ങളുടെ നീളം p, q എന്നുമെടുത്താൽ $a : b$ എന്ന അംശബന്ധവും, $p : q$ എന്ന അംശബന്ധവും ഒന്നുതന്നെയാണോ എന്നാണ് അന്വേഷിക്കേണ്ടത്.

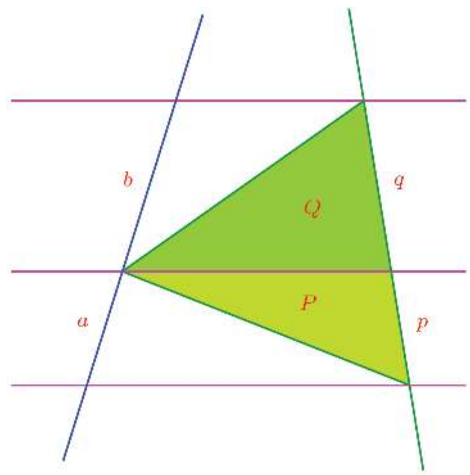


അതിന് ആദ്യം നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധമായ $a : b$ യെ രണ്ടു പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധമായി മാറ്റാം:

ആദ്യ ചിത്രത്തിൽ, $a : b$ എന്ന അംശബന്ധം, താഴെയും മുകളിലുമുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണല്ലോ (**പരപ്പളവ്** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണഭാഗം**)

ഈ പരപ്പളവുകളെ A, B എന്നെടുത്താൽ,

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

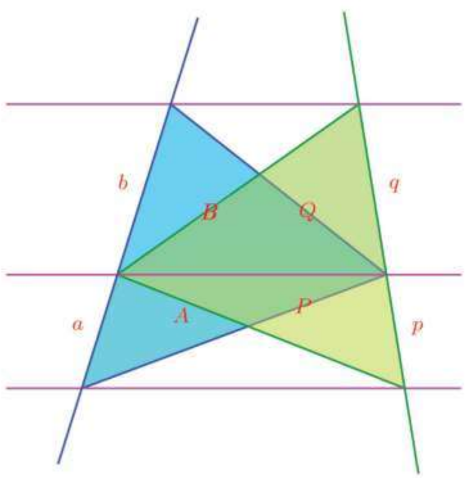


ഇതുപോലെ p, q എന്നീ നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തെയും, പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധമാക്കാം:

ചിത്രത്തിലേതുപോലെ, പച്ച ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ P, Q എന്നെടുത്താൽ,

$$\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$$

ഇനി എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളും ഒരുമിച്ചുവച്ചു നോക്കാം:



ഇപ്പോൾ താഴത്തെ നീല ത്രികോണത്തിന്റെയും പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെയും ഒരു വശം ഒരേ വരയാണ്; അവയുടെ മൂന്നാം മൂലകൾ ഈ വശത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലുമാണ്. അതിനാൽ അവയ്ക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണ്:

$$A = P$$

ഇതുതന്നെയല്ലേ മുകളിലെ നീലയും പച്ചയും ത്രികോണങ്ങളുടെ കാര്യവും?

$$B = Q$$

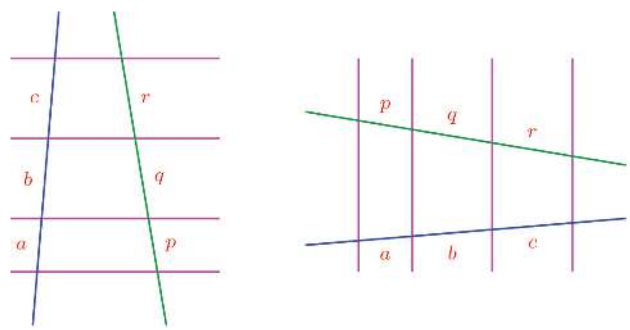
$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ എന്നും, $\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$ എന്നും നേരത്തെ കണ്ടതാണല്ലോ. ഇപ്പോൾ ഇതിലെ $A = P$ യും $B = Q$ യും ആണെന്നും കിട്ടി. അങ്ങനെ

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

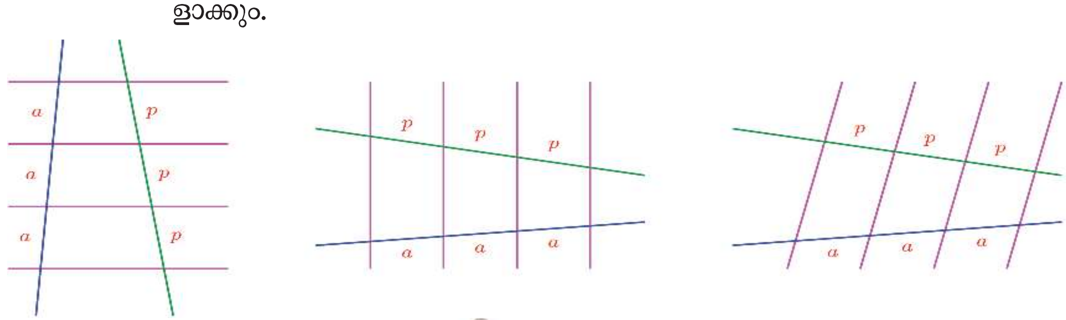
എന്നു കാണാം. അതായത്, മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ ഏതു രണ്ടു വരകളേയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്. മൂന്നിലധികം സമാന്തരവരകളായാലും, ഇതുപോലെതന്നെ തുടരാമല്ലോ:

മൂന്നോ അതിലധികമോ സമാന്തരവരകൾ, ഏതു രണ്ടു വരകളെയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഉദാഹരണമായി ചുവടെയുള്ള മൂന്നു ചിത്രങ്ങളിലും a, b, c എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും p, q, r എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും ഒന്നുതന്നെയാണ്.



അപ്പോൾ ചില സമാന്തരവരകൾ ഒരു വരയെ സമഭാഗങ്ങളാക്കുകയാണെങ്കിലോ? ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, ഇവ ഏതു വരയെയും സമഭാഗങ്ങളാക്കും.



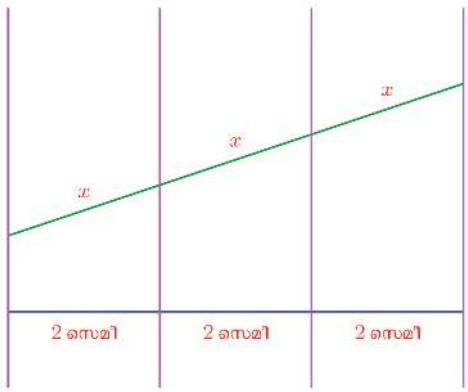
മൂന്നോ അതിലധികമോ സമാന്തരവരകൾ ഒരു വരയെ തുല്യഭാഗങ്ങളായി മുറിക്കുകയാണെങ്കിൽ, ഏതു വരയെയും തുല്യഭാഗങ്ങളായിത്തന്നെ മുറിക്കും.

ഇനി ഈ തത്വങ്ങളുടെ ചില പ്രയോഗങ്ങൾ നോക്കാം.

7 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കാൻ, ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കാം; ഒരറ്റത്തു നിന്ന് 3.5 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ ഒരു കുത്തിട്ടാലും മതി. മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയിൽ ഇതെളുപ്പമാണ്.

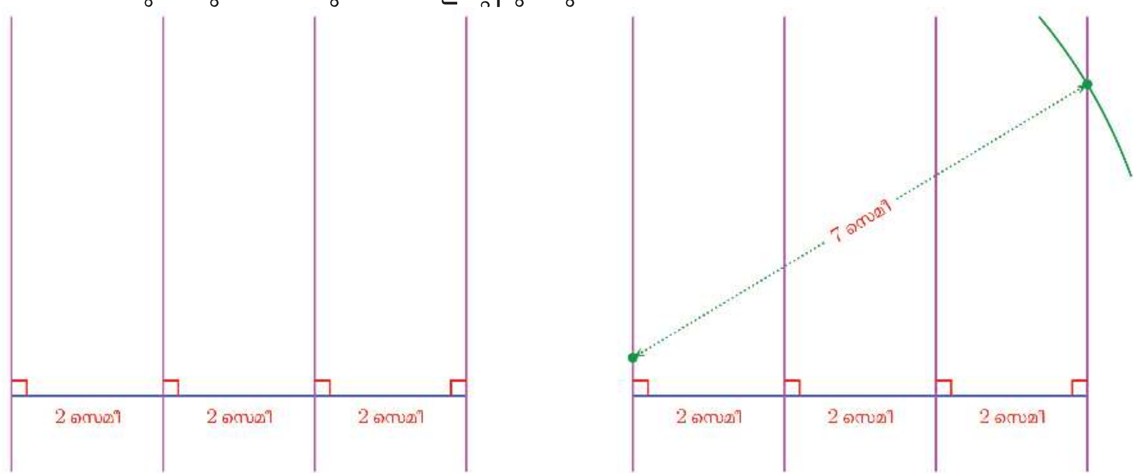
6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന നാലു സമാന്തര വരകൾ, ഏതു വരയെയും മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ:



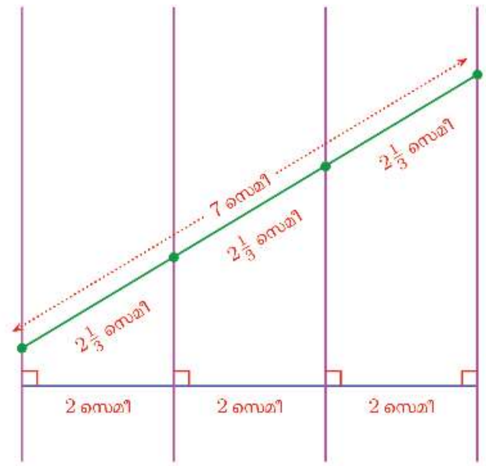
രണ്ടാമത്തെ വരയുടെ നീളം 7 സെന്റിമീറ്ററാക്കിയാലോ?

അപ്പോൾ നമ്മുടെ പ്രശ്നം തീർക്കാനുള്ള വഴി തെളിഞ്ഞില്ലേ?

6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരച്ച്, അതിൽ 2 സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക; ആദ്യത്തെ ലംബത്തിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് 7 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തഭാഗം വരച്ച്, ഇത് അവസാനത്തെ ലംബത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.

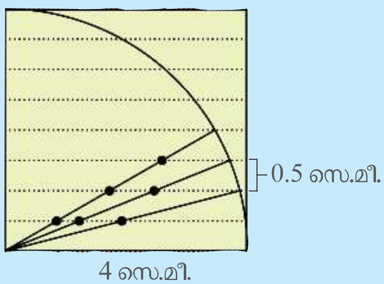


ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ, 7 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും, അതിന്റെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളുമായി:



വൃത്ത വിഭജനം

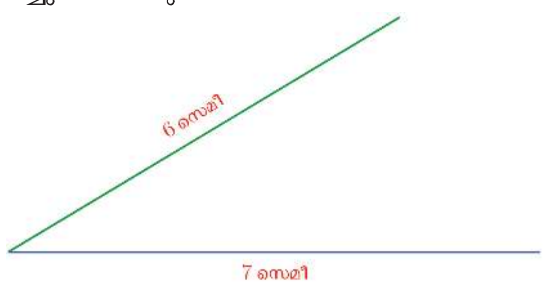
ചിത്രം നോക്കൂ:



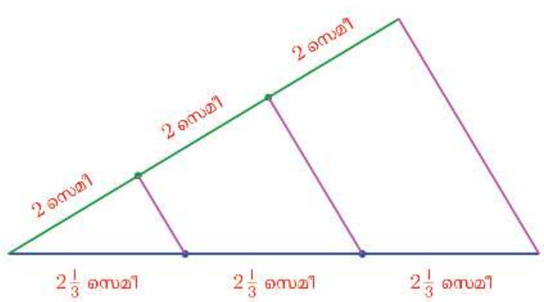
4 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ, രണ്ടും മൂന്നും, നാലും സമഭാഗങ്ങളാക്കിയിരിക്കുന്നത് കണ്ടില്ലേ? ഇതുപോലെ എട്ട് സമഭാഗങ്ങൾ വരെ ഈ ചിത്രം ഉപയോഗിച്ചുതന്നെ സാധിക്കുമല്ലോ. ഇതുപോലെ വരയിട്ട നോട്ടുപുസ്തകത്തിൽ ഒരു വൃത്തഭാഗം വരച്ച്, 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 7 സമഭാഗങ്ങളാക്കാമോ?

മറ്റൊരു രീതിയിലും വരയ്ക്കാം:

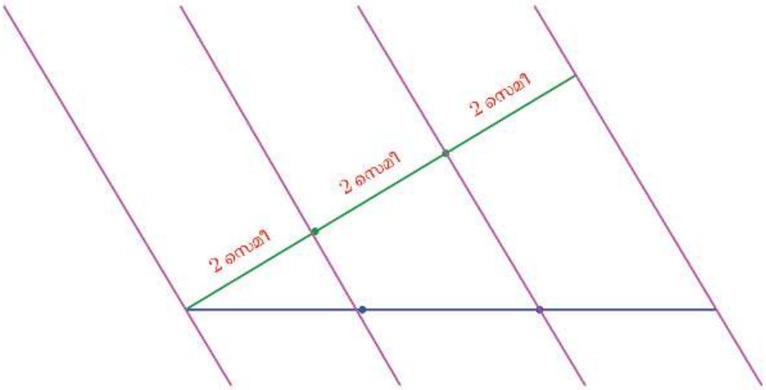
ആദ്യം 7 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിലൊരു വര വരച്ച്, അതിന്റെ ഒരറ്റത്തുനിന്ന് 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിലൊരു വര അൽപം ചരിച്ചു വരയ്ക്കുക:



വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചൊരു വര വരയ്ക്കുക. ഇനി താഴത്തെ വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കാൻ, മുകളിലെ വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കി, ആ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ സമാന്തരവരകൾ വരച്ചാൽപ്പോരേ?



ഇതെന്തുകൊണ്ടാണെന്നു മനസിലായില്ലെങ്കിൽ, അൽപം നീട്ടിയ സമാന്തരവരകളും, നാലാമതൊരു സമാന്തരവരയും സങ്കൽപിച്ചുനോക്കൂ.



നിഴൽക്കണക്ക്

ഒരു മരത്തിന്റെ ഏറ്റവും താഴത്തെ ചില്ല വരെയുള്ള ഉയരം 1 മീറ്ററും അതുവരെയുള്ള നിഴലിന്റെ നീളം 2 മീറ്ററുമാണ്. നിഴലിന്റെ ആകെ നീളം 8 മീറ്റർ.

മരത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

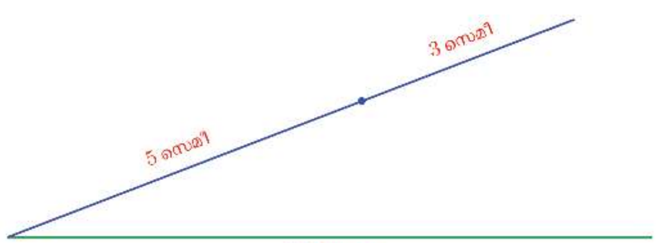
മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ഇവിടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവെന്താണ്?

നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഇതിന്റെതന്നെയായി, 17 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവിൽ ചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

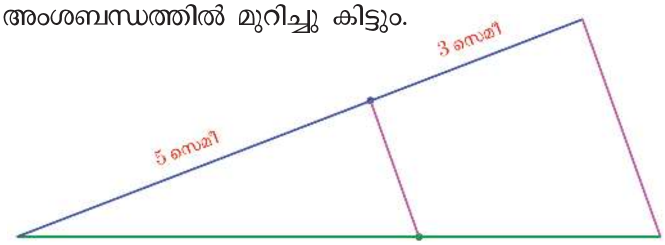
ചുറ്റളവ് 17 സെന്റിമീറ്ററെന്നാൽ, നീളത്തിന്റെയും വീതിയുടെയും തുക 8.5 സെന്റിമീറ്റർ. ഈ നീളമുള്ള വരയെ 5 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന കഷണങ്ങൾ നീളവും വീതിയുമായി ചതുരം വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ.

അപ്പോൾ ആദ്യം 8.5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വര വരയ്ക്കാം. ഇതിനെ 5 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കാൻ, ആദ്യത്തെ കണക്കിന്റെ രണ്ടാം വഴിയിൽ ചെയ്തതുപോലെ ഒരറ്റത്തുനിന്ന് 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ മറ്റൊരു വരയും വരച്ച്, അതിനെ 5 സെന്റിമീറ്ററും 3 സെന്റിമീറ്ററുമായി ഭാഗിക്കാം:

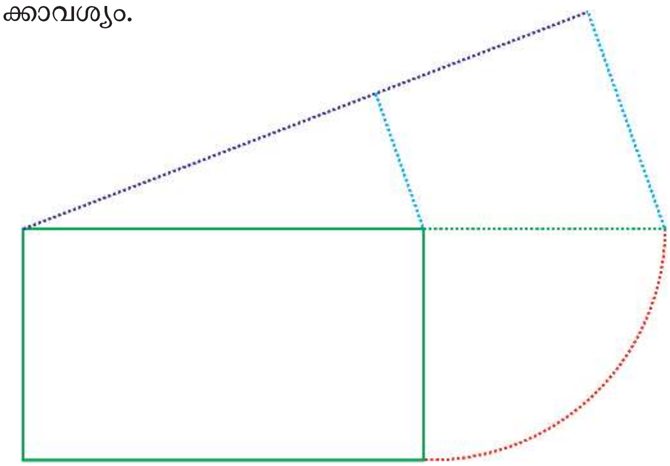


ജിയോജിബ്രയിൽ A എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി AB എന്ന വരയും AC എന്ന വരയും വരയ്ക്കുക. Min = 0, Max = 1 ആയ ഒരു സ്ലൈഡർ c നിർമ്മിക്കുക. A കേന്ദ്രമായി ആരം AB യുടെ c ഭാഗം വരത്തക്കവിധം ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക (ഇതിനായി വൃത്തത്തിന്റെ ആരം നൽകാനുള്ള ജാലകത്തിൽ c * AB എന്ന് നൽകിയാൽ മതി). ഈ വൃത്തം AB യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇതുപോലെ A കേന്ദ്രമായും ആരം AC യുടെ c ഭാഗമായും ഒരു വൃത്തം വരച്ച് ഇത് AC യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. AD, AE എന്നീ വരകളും BC, DE എന്നീ വരകളും വരച്ച് അവയുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ നീളങ്ങൾ തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം? എന്തുകൊണ്ട്? സ്ലൈഡർ നിരക്കി, D, E ഇവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

ഇനി വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച്, അതിനൊരു സമാന്തരവരയും വരച്ചാൽ, താഴത്തെ വരയും 5 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ മുറിച്ചു കിട്ടും.



ഈ കഷണങ്ങൾ നീളവും വീതിയുമായ ചതുരമാണ് നമുക്കാവശ്യം.

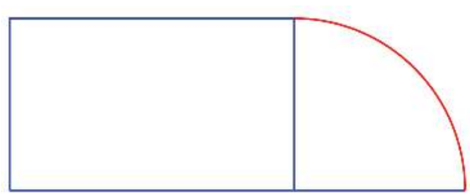


അൽപം വ്യത്യാസമുള്ള മറ്റൊരു കണക്ക്:

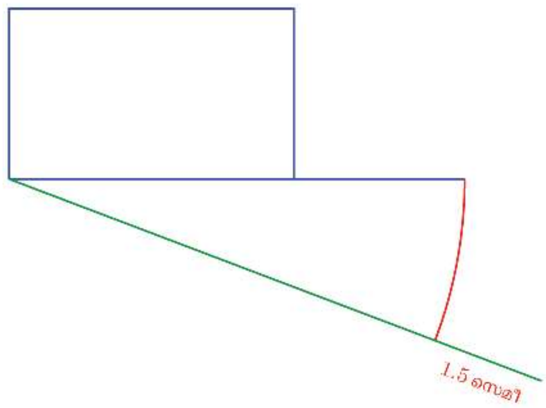
ഇവിടെ ഒരു ചതുരം വരച്ചിട്ടുണ്ട്:

ഇതിന്റെ നീളവും വീതിയുമൊന്നും പറഞ്ഞിട്ടില്ല. വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം മാറാതെ, ചുറ്റളവ് 3 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി വരയ്ക്കണം.

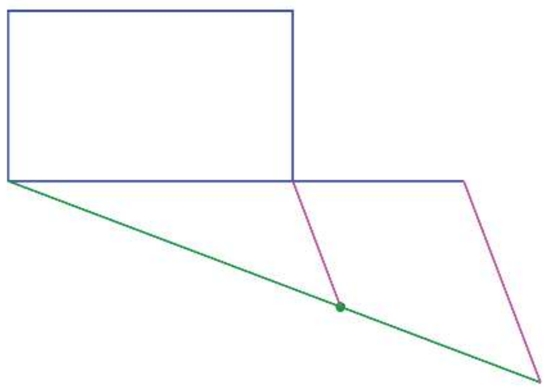
അതിനാദ്യം നീളവും വീതിയും ഒരു വരയിലാക്കാം:



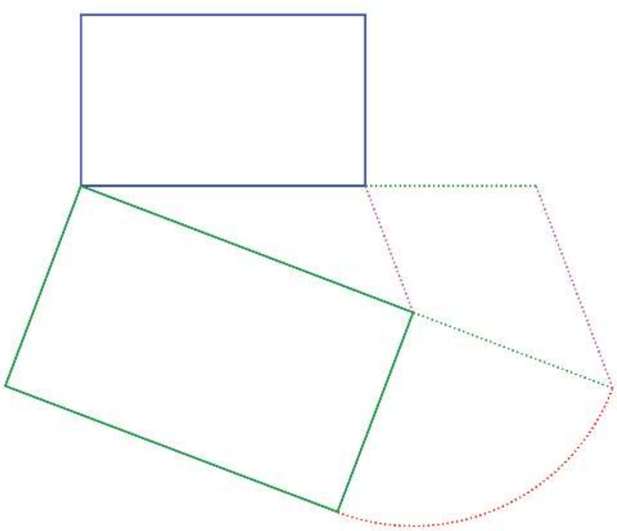
ഇനി ഇതിനു താഴെ, ഇതേ നീളമുള്ള വര അൽപം ചരിച്ചു വരച്ച്, അതിനെ 1.5 സെന്റിമീറ്റർ കൂടി നീട്ടാം: (എന്തുകൊണ്ട്?)



ഇനി പഴയതുപോലെ വരകളുടെ അറ്റം യോജിപ്പിച്ച്, സമാന്തരവര വരച്ച്, താഴത്തെ വരയെ ഭാഗിക്കാം:



ഇനി ഈ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളും നീളവും വീതിയുമായി ചതുരം വരച്ചാൽ മതി:



6H813R

(1) 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വര വരച്ച് അതിനെ 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുക.

(2) 15 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവും, വീതിയും നീളവും 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുമായ ചതുരം വരയ്ക്കുക.

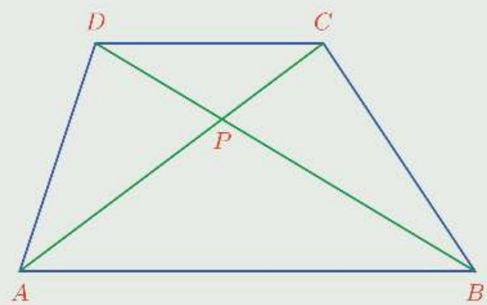
(3) ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ തരത്തിലുമുള്ള ത്രികോണം, ചുറ്റളവ് 10 സെന്റിമീറ്ററായി വരയ്ക്കുക

i) സമഭുജത്രികോണം.

ii) വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 4 : 5

iii) വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 : 4

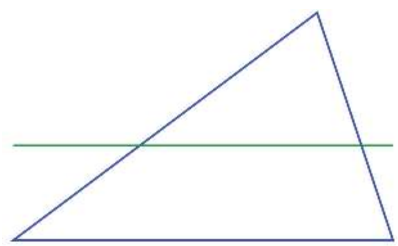
(4) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ $ABCD$ എന്ന ലംബകത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു:



$PA \times PD = PB \times PC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

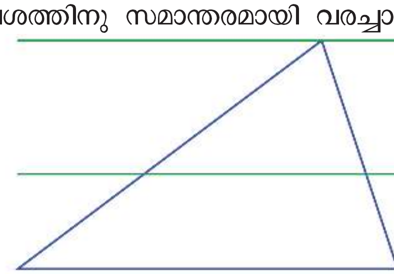
ത്രികോണഭാഗം

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച്, അതിനുള്ളിൽത്തന്നെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വര വരയ്ക്കുക:



ഈ വര ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽ മൂലയിലൂടെ ഒരു വര കൂടി താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരച്ചാലോ?



ജിയോജിബ്രയിൽ ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. AB എന്ന വശത്ത് ഒരു ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തി, അതിലൂടെ BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഈ വര AC യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. D, E എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ AB, AC എന്നീ വരകളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണോ മുറിക്കുന്നതെന്ന് പരിശോധിക്കൂ. നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കാവുന്നതാണ്.

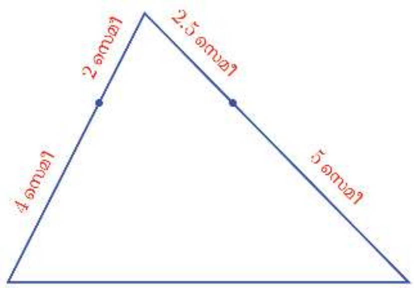
ഇപ്പോൾ മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ, ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നു; മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഒന്നുതന്നെ ആണല്ലോ. ഈ ഭാഗങ്ങൾ, ആദ്യം വരച്ച വര വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തന്നെയാണ്.

അപ്പോൾ ഇവിടെ എന്താണു കണ്ടത്?

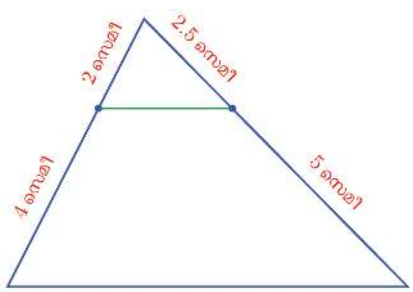
ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് മുറിക്കുന്നത്.

മറിച്ച്, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

ഉദാഹരണമായി ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഇടതും വലതും വശങ്ങളെ $1:2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.



ഇടതുവശത്തിലെ ബിന്ദുവിലൂടെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര വലതുവശത്തിലെ ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുമല്ലോ, മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, താഴത്തെ വരയ്ക്കു സമാന്തരമാണ്.

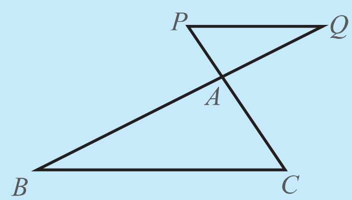


അംശബന്ധം മാറ്റിയാലും ഇപ്പറഞ്ഞത് ശരിയാകുമല്ലോ: അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമാണ്.

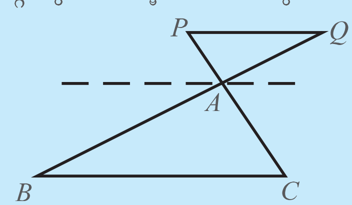
ത്രികോണ ബാഹ്യം

ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി ത്രികോണത്തിനു പുറത്ത് വരച്ചാലും ആ വര, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഖണ്ഡിക്കുന്നതെന്നു കാണാം. ചിത്രം നോക്കൂ.



BC യ്ക്കു സമാന്തരമാണ് PQ

A യിൽക്കൂടി BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി മറ്റൊരു വര കൂടി വരയ്ക്കുക.



അപ്പോൾ

$$\frac{AC}{AP} = \frac{AB}{AQ}$$

കൂടാതെ, ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$\frac{PC}{AP} = \frac{AP+AC}{AP} = 1 + \frac{AC}{AP}$$

$$\frac{QB}{AQ} = \frac{AQ+AB}{AQ} = 1 + \frac{AB}{AQ}$$

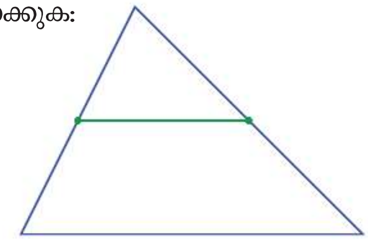
എന്നും കാണാം.

ഈ മൂന്നു സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB}$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

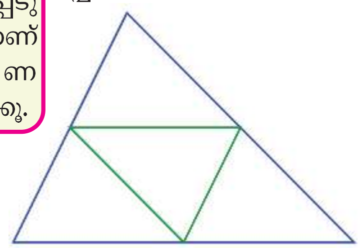
ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കുക:

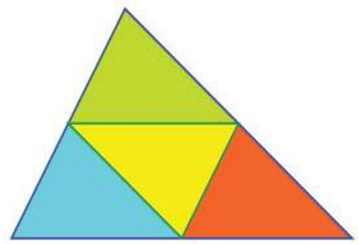


ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും ഉള്ളിലുള്ള ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ.

നീല ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാണ് പച്ച വര വരച്ചിരിക്കുന്നത്. മേൽപ്പറഞ്ഞ തത്വം അനുസരിച്ച്, ഈ വര, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമാണല്ലോ.

ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാലോ?





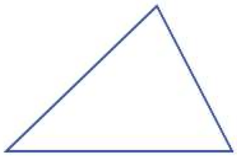
നടുവിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു സമാന്തരമാണ്.

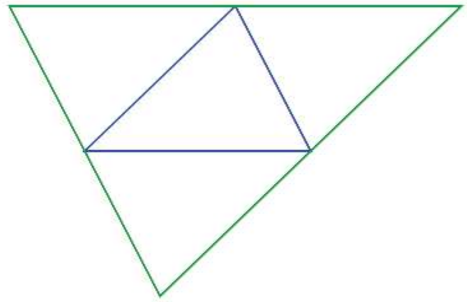
ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണെന്നു തോന്നുന്നില്ലേ? അതു ശരിയാണോ എന്നു നോക്കാം. ആദ്യം നീലത്രികോണവും മഞ്ഞത്രികോണവും എടുക്കാം. നീലത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശവും, മഞ്ഞത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശവും ഒരേ വരയാണ്. നീലത്രികോണത്തിൽ ഈ വശത്തിന്റെ മുകളിലെ കോണും, മഞ്ഞത്രികോണത്തിൽ ഈ വശത്തിന്റെ താഴെയുള്ള കോണും തുല്യമാണ്; മറിച്ചും (എന്തുകൊണ്ട്?) അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണ്. ഇതുപോലെ പച്ചത്രികോണവും, ചുവന്ന ത്രികോണവും എല്ലാം മഞ്ഞത്രികോണത്തിനു തുല്യമാണെന്നു കാണാം. അതായത്, ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണ്.

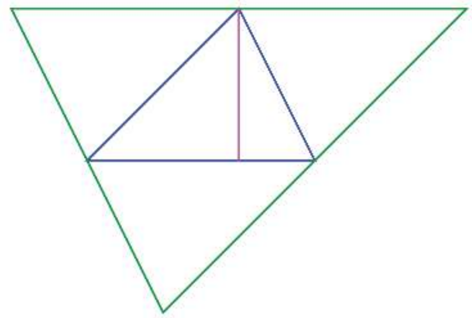
ഇതിൽനിന്ന് മറ്റൊരു കാര്യം കിട്ടും. ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമായതിനാൽ, ഓരോ വശവും വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ പകുതിയാണ്. അതായത്,

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ നീളം, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഇനി ഒരു ചെറിയ ത്രികോണത്തിൽനിന്നു തുടങ്ങി, ഓരോ മൂലകളിലൂടെയും എതിർവശത്തിനു സമാന്തരവര വരച്ചാലോ?



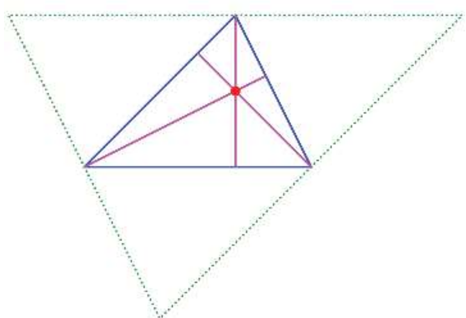




ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു പകർപ്പുകൾ കൂടിച്ചേർത്തുവച്ച വലിയ ത്രികോണമായി, അല്ലേ?

ഇതിൽ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽനിന്ന് എതിർവശത്തേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയാണ്.

അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ മൂലകളിൽ നിന്നും എതിർവശങ്ങളിലേക്ക് ലംബം വരച്ചാലോ? വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളുടെയും ലംബസമഭാജികളായി. ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ ലംബസമഭാജികളെല്ലാം ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമെന്ന് **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ:



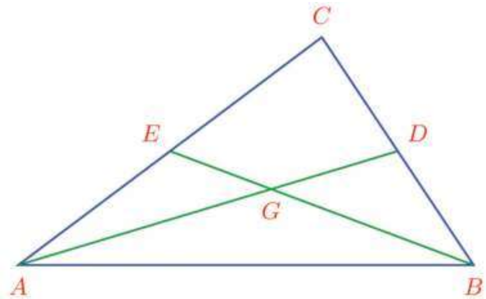
ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നും എതിർവശത്തേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക. ഇവ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നുണ്ടോ? ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ.

ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഓരോ മൂലയിൽനിന്നും എതിർവശത്തേയ്ക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങൾ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും.

ഇതേപോലെ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയും എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമെന്നും തെളിയിക്കാം. ഇത്തരമൊരു വരയെ ത്രികോണത്തിന്റെ **നടുവര** **(median)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നുമുള്ള നടുവരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്നു ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയിലേക്കും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

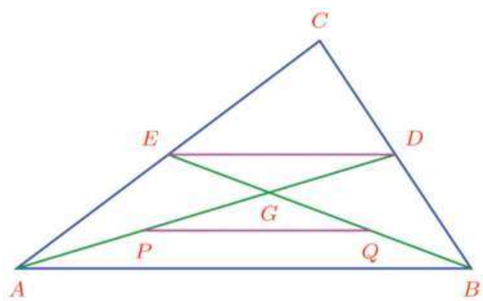
ചിത്രത്തിൽ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ രണ്ടു മൂലകളിൽ നിന്നുമുള്ള നടുവരകൾ G എന്ന ബിന്ദുവിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു.



ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരവും അതിന്റെ പകുതിയുമാണ്. അതായത്,

$$ED = \frac{1}{2}AB$$

ഇനി താഴത്തെ വശത്തിന്മേൽത്തന്നെ GAB എന്ന മറ്റൊരു ചെറിയ ത്രികോണമുണ്ടല്ലോ; അതിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾകൂടി യോജിപ്പിച്ചാലോ?



$$PQ = \frac{1}{2}AB$$

അപ്പോൾ

$$PQ = ED$$

$PQDE$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിലെ, PQ, ED എന്നീ വശങ്ങൾ തുല്യവും സമാന്തരവുമായതിനാൽ, ഈ ചതുർഭുജമൊരു സാമാന്തരികമാണ്; അതിനാൽ അവയുടെ വികർണങ്ങളായ PD, QE ഇവ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യും; അതായത്,

$$PG = GD$$

AG യുടെ മധ്യബിന്ദുവാണല്ലോ, P; അപ്പോൾ

$$AP = PG = GD$$

ഇതുപോലെ

$$BQ = QG = GE$$

എന്നും കാണാം. അതായത്, നടുവരകൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു, അവയെ $2:1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു.

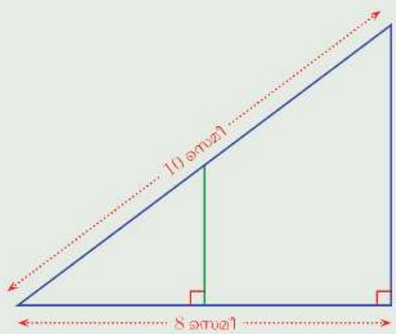
ഇനി A, B, ഇവയിലൂടെയുള്ള നടുവരകൾക്കു പകരം, B, C എന്നീ മൂലകളിലുടെയുള്ള നടുവരകളാണ് വരയ്ക്കുന്നതെങ്കിലോ?

അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു BE യെ $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കും; അതായത്, മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു G തന്നെയാണ്.

ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും നടുവരകൾ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും; ആ ബിന്ദു നടുവരകളെയെല്ലാം, മൂലകളിൽനിന്ന് 2 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കും.

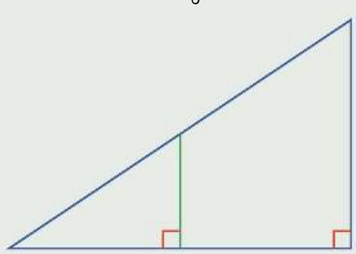
നടുവരകൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ ത്രികോണത്തിന്റെ **മധ്യമകേന്ദ്രം (centroid)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

(1) ചിത്രത്തിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽനിന്ന് പാദത്തിലേയ്ക്ക് ലംബം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം വശത്തിന്റെ നീളവും, ചെറിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെ നീളവും കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു മട്ടത്രികോണം വരച്ച്, കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽനിന്ന് പാദത്തിലേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക:



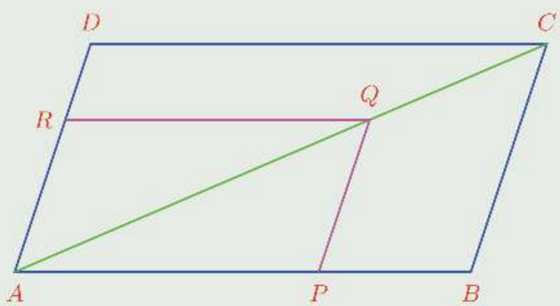
i) ഈ ലംബം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) ഈ ലംബം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

iii) വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽനിന്ന് മൂന്നു മൂലകളിലേയ്ക്കുമുള്ള അകലം തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

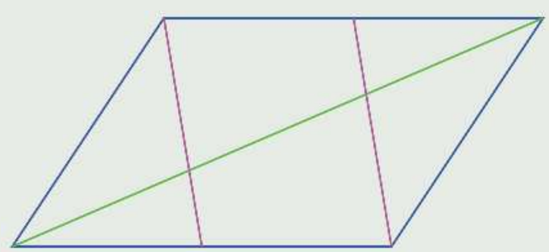
iv) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം, കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(3) $ABCD$ എന്ന സാമാന്തരികത്തിൽ AB യിലെ ഒരു ബിന്ദു P യിൽക്കൂടി BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര AC യുമായി Q ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. Q വിലൂടെ AB യ്ക്കു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, AD യുമായി R ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു:



$\frac{AP}{PB} = \frac{AR}{RD}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ടു മൂലകളെ, രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു:



ഈ വരകൾ ചിത്രത്തിലെ വികർണത്തെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു എന്നു തെളിയിക്കുക.

(5) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജം സാമാന്തരികം ആയിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക. ആദ്യത്തെ ചതുർഭുജം ചതുരമായാലോ? സമഭുജസാമാന്തരികമായാലോ?

സദൃശ ത്രികോണങ്ങൾ

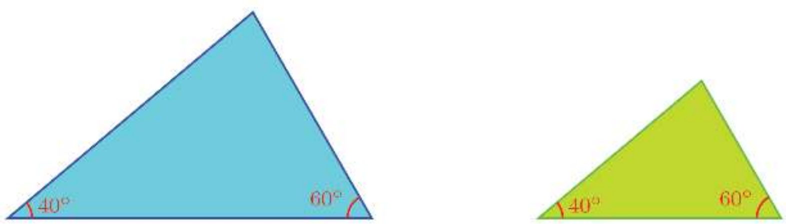
7

കോണുകളും വശങ്ങളും

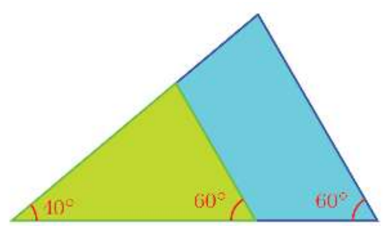
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവയുടെ കോണുകളും തുല്യമാണെന്ന് അറിയാമല്ലോ; മറിച്ച്, കോണുകൾ തുല്യമായാൽ വശങ്ങൾ തുല്യമാകണമെന്നില്ല എന്നും അറിയാം (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **തുല്യ ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠം).

അപ്പോൾ ഒരു ചോദ്യമുണ്ട്: ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വ്യത്യസ്ത വലിപ്പത്തിൽ കട്ടിക്കടലാസിൽ വരച്ച്, വെട്ടിയെടുക്കുക. ഉദാഹരണമായി ഇങ്ങനെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളാകാം:

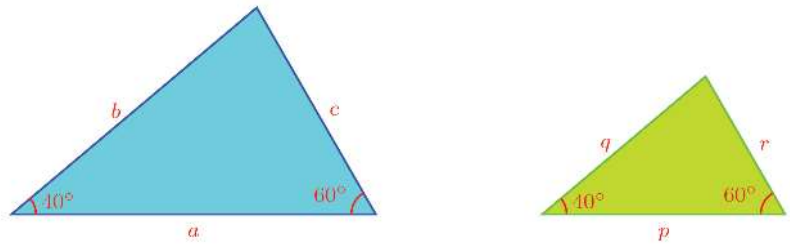


വശങ്ങളുടെ നീളം തട്ടിച്ചുനോക്കാൻ, ചെറിയ ത്രികോണമെടുത്ത് വലുതിന്റെ ഉള്ളിൽ വയ്ക്കുക. ഇടതു മൂലകൾ ചേർന്നിരിക്കട്ടെ. കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഈ മൂലയിലെ വശങ്ങളും ചേർന്നിരിക്കും.

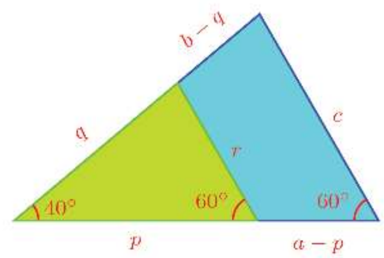


ഇതിൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വലതു വശങ്ങൾ, താഴത്തെ വരയുമായി ഒരേ ചരിവിലാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ വശങ്ങൾ സമാന്തരമാണ്. അതിനാൽ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്. (**സമാന്തരവരകൾ** എന്ന പാഠം)

ഇക്കാര്യം അൽപംകൂടി വ്യക്തമാക്കാൻ, ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം അക്ഷരങ്ങൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാം:



ചേർത്തുവയ്ക്കുമ്പോൾ അളവുകൾ ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം:



അപ്പോൾ നേരത്തെ പറഞ്ഞ അംശബന്ധങ്ങളുടെ തുല്യത ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\frac{a-p}{p}=\frac{b-q}{q}$$

ഇതൽപം ലഘൂകരിച്ച്, ഇങ്ങനെയെഴുതാമല്ലോ:

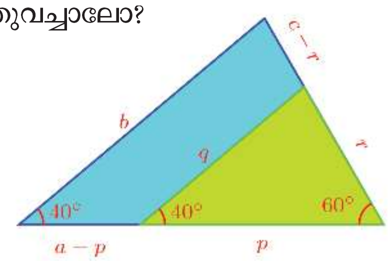
$$\frac{a}{p}-1=\frac{b}{q}-1$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}$$

എന്നു കാണാം.

ത്രികോണങ്ങളുടെ ഇടതു മൂലകൾ ചേർത്തുവയ്ക്കുന്നതിനു പകരം, വലതു മൂലകൾ ചേർത്തുവച്ചാലോ?



അപ്പോൾ ആദ്യം കണ്ടതുപോലെ

$$\frac{a-p}{p}=\frac{c-r}{r}$$

എന്നും തുടർന്ന്

$$\frac{a}{p} = \frac{c}{r}$$

എന്നു കാണാം.

രണ്ടു തരത്തിൽ ത്രികോണങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയ കാര്യങ്ങൾ ഒന്നിച്ചെഴുതിയാലോ?

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$$

എന്താണിതിന്റെ അർഥം?

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ 40°, 60°, 80° ആണല്ലോ. ഇതിലെ 80° കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളാണ് a യും p യും; 60° കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ b യും q യും; 40° കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ c യും r ഉം;

a എന്ന നീളം p എന്ന നീളത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ് $\frac{a}{p}$

b എന്ന നീളം q എന്ന നീളത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ് $\frac{b}{q}$

c എന്ന നീളം r എന്ന നീളത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ് $\frac{c}{r}$

അപ്പോൾ $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ എന്നതിന്റെ അർഥം, മേൽപ്പറഞ്ഞ മടങ്ങുകൾ തുല്യമാണെന്നാണ്.

അതായത്, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ (a, p), (b, q), (c, r) എന്നിങ്ങനെ ജോടികളാക്കിയാൽ, വലിയ നീളങ്ങളായ a, b, c എന്നിവ ചെറിയ നീളങ്ങളായ p, q, r ഇവയുടെ ഒരേ മടങ്ങാണ്.

സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാൽ; p, q, r എന്നീ സംഖ്യകളെ ഒരേ സംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നവയാണ് a, b, c എന്നീ സംഖ്യകൾ.

$$a = kp,\ b = kq,\ c = kr$$

ഇതിൽ കോണുകൾ 80°, 60°, 40° എന്നതിനുപകരം, വേറെ ഏതായാലും ഇപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം ശരിയാകുമല്ലോ. അപ്പോൾ പൊതുവായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ ജോടികളായെടുത്താൽ, വലിയ നീളങ്ങളെല്ലാം ചെറിയ നീളങ്ങളുടെ ഒരേ മടങ്ങാണ് (അഥവാ, ചെറിയ നീളങ്ങളെല്ലാം വലിയ നീളങ്ങളുടെ ഒരേ ഭാഗമാണ്)

ഇത് ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിപ്പറയാം

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ വലിപ്പക്രമത്തിൽ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

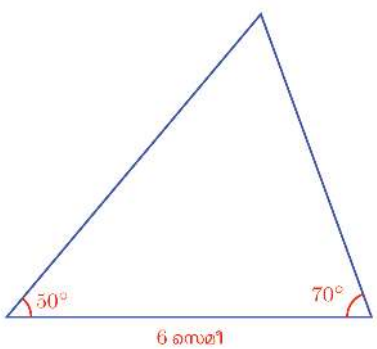
ജിയോജിബ്രയിൽ ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Min = 0 ആയി ഒരു സ്ലൈഡർ d ഉണ്ടാക്കുക. Segment with Given Length ഉപയോഗിച്ച് നീളം AB യുടെ d മടങ്ങോ ഭാഗമോ വരത്തക്ക വിധം ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഇതിനായി വരയുടെ നീളം d * AB എന്നു കൊടുത്താൽ മതി. ഇനി $\angle D = \angle A$, $\angle E = \angle B$ ആകത്തക്ക വിധം ത്രികോണം DEF വരയ്ക്കണം. ഇതിനായി Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് E, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി α ($\angle A$ യുടെ അളവ്) എന്നു നൽകുക. അതേപോലെ D, E എന്നിവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ β എന്ന് clockwise ആയി നൽകുക. DE', ED' എന്നീ വരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടേയും വശങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണോ? ത്രികോണം ABC യുടെ അളവുകളും സ്ലൈഡറും മാറ്റി നോക്കൂ.

മറ്റൊരു രീതിയിലും ഇതു പറയാം: രണ്ടു അളവുകളിൽ ഒന്നു മറ്റൊന്നിന്റെ എത്ര മടങ്ങ് (അല്ലെങ്കിൽ ഭാഗം) എന്നതിനെ മാറ്റത്തിന്റെ തോത് (scale factor) എന്നു പറയാറുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും 4 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും എടുത്താൽ, വലിയ നീളം ചെറിയ നീളത്തിന്റെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങാണ്. മറിച്ച്, ചെറിയ നീളം വലിയ നീളത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ്. ഇവിടെ ചെറിയ നീളത്തിൽനിന്ന് വലിയ നീളത്തിലേക്കുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ തോത് $1\frac{1}{2}$ എന്നും, വലുതിൽനിന്ന് ചെറുതിലേക്കുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ തോത് $\frac{2}{3}$ എന്നും പറയാം.

ഈ ഭാഷയിൽ, നമ്മുടെ പൊതുതത്വം ഇങ്ങനെ പറയാം:

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ്

ഇനി ഈ കണക്ക് നോക്കൂ:



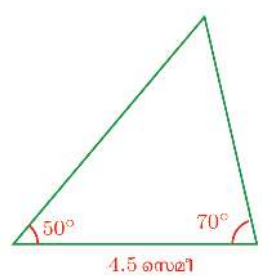
ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കി ചെറിയ ത്രികോണം വരയ്ക്കണം.

താഴത്തെ വശം 4.5 സെന്റിമീറ്ററാക്കിയാൽ മതി. മറ്റു വശങ്ങളോ?

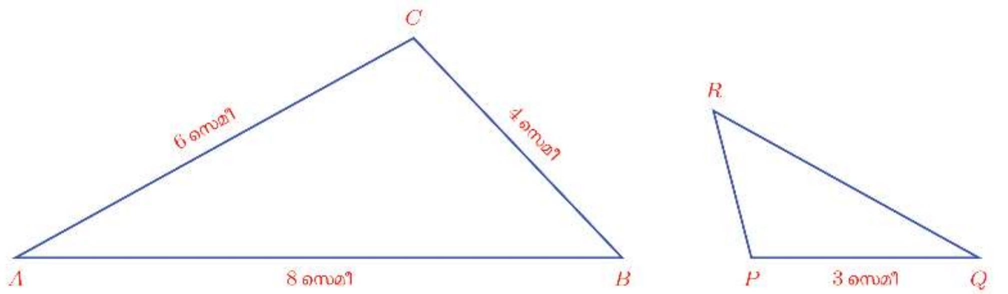
വലിയ ത്രികോണം വരച്ച്, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ അളന്ന് $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കി വരയ്ക്കണോ?

4.5 സെന്റിമീറ്റർ വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും ഇതേ കോണുകൾ വരച്ചാൽപ്പോരേ?

കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ; ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച് മറ്റു വശങ്ങളും $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാകുമല്ലോ.



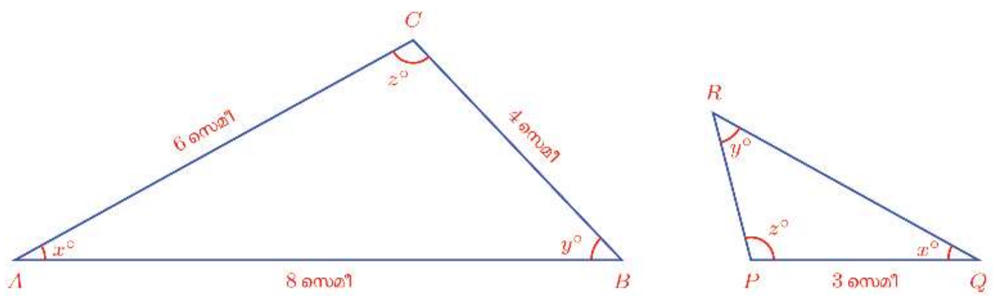
മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:



$$\angle P = \angle C \quad \angle Q = \angle A \quad \angle R = \angle B$$

PQR എന്ന ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

ആദ്യം കോണുകളുടെ അളവുകൾ x°, y°, z° എന്നെടുത്ത്, ചിത്രത്തിൽ തുല്യമായ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്താം.



ഇനി തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ ജോടികൾ എഴുതാം.

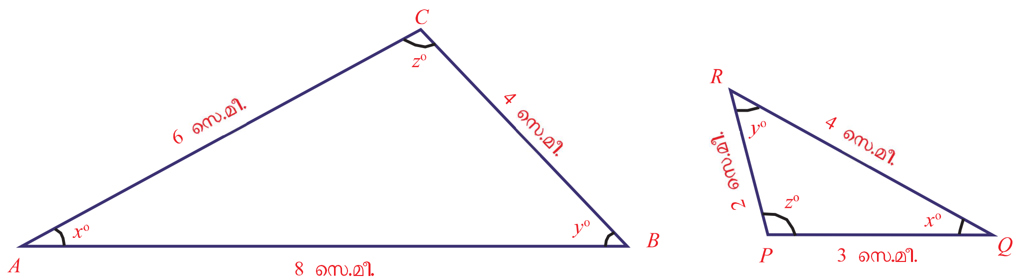
x	BC	PR
y	AC	PQ
z	AB	QR

ഇതിൽ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെയും നീളം അറിയാമല്ലോ.

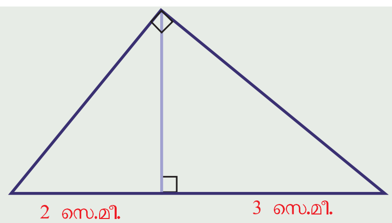
x	BC	$= 4$	PR
y	AC	$= 6$	$PQ = 3$
z	AB	$= 8$	QR

ഇതിൽ y° കോണിന്റെ എതിർവശങ്ങളിൽ, വലുതിന്റെ പകുതിയാണ് ചെറുത്. അപ്പോൾ മറ്റു കോണുകളുടെയും എതിർവശങ്ങളും ഇങ്ങനെതന്നെ ആകണം.

x	BC	$=$	4	$PR = 2$
y	AC	$=$	6	$PQ = 3$
z	AB	$=$	8	$QR = 4$



(1) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മട്ടമൂലയിൽനിന്ന് കർണത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബം, കർണത്തിനെ 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.



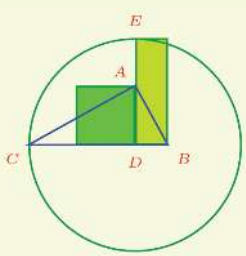
i) ലംബം മുറിച്ചുണ്ടാകുന്ന രണ്ടു ചെറിയ മട്ടത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

ii) ലംബത്തിന്റെ ഉയരം h എന്നെടുത്താൽ $\frac{h}{2} = \frac{3}{h}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

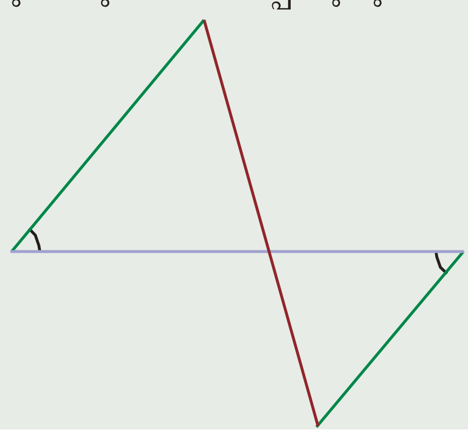
iii) വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

iv) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മട്ടമൂലയിൽനിന്നു കർണത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ നീളം h എന്നും, അത് കർണത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം a, b, എന്നുമെടുത്താൽ $h^2 = ab$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

ABC എന്ന മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക. മട്ടമൂലയിൽനിന്നും കർണത്തിലേക്ക് ഒരു ലംബം വരച്ച്, കർണവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. D കേന്ദ്രമായി, C യിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, വൃത്തവും ലംബവും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. AD ഒരു വശമായിവരുന്ന സമചതുരവും, BD, DE ഇവ വശങ്ങളായി വരുന്ന ചതുരവും നിർമിക്കുക. സമചതുരത്തിന്റെയും ചതുരത്തിന്റെയും പരപ്പളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ തുല്യമല്ലേ? മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ.



(2) വിലങ്ങനെയുള്ള ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും ഒരേ വലുപ്പമുള്ള കോണുകൾ മുകളിലും താഴെയുമായി വരച്ച്, ചരിഞ്ഞ വരകളിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്നു.

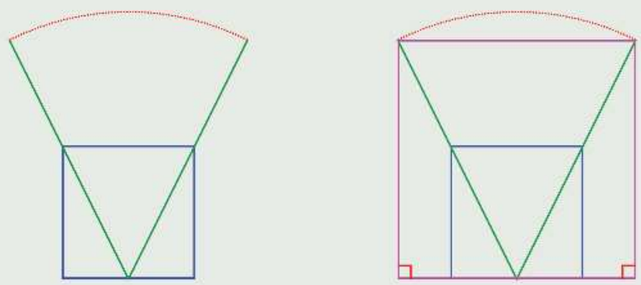


i) വിലങ്ങനെയുള്ള വരയുടെ ഭാഗങ്ങളും, ചരിഞ്ഞ വരയുടെ ഭാഗങ്ങളും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) വിലങ്ങനെയുള്ള വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള ചരിഞ്ഞ വരകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും ഇതുതന്നെയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

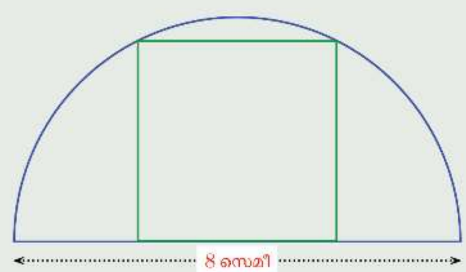
iii) ഇതുപയോഗിച്ച്, 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന രീതി വിശദീകരിക്കുക.

(3) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും മുകൾ വശത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളും യോജിപ്പിച്ച്, ഒരേ നീളത്തിൽ നീട്ടുന്നു. ഈ വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുകയും, അവയിൽനിന്ന് സമചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം നീട്ടിയ വരയിലേക്ക് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

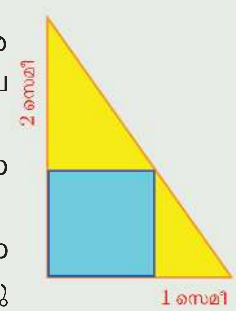


i) ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജവും സമചതുരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിലെപ്പോലെ, ഒരു അർധവൃത്തത്തിൽ രണ്ടു മൂലകളും, അതിന്റെ വ്യാസത്തിൽ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുമായി ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.



(4) ചിത്രത്തിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ മട്ടമൂലയും, മൂന്നു വശങ്ങളിലെയും ഓരോ ബിന്ദുക്കളും മൂലകളായി ഒരു സമചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

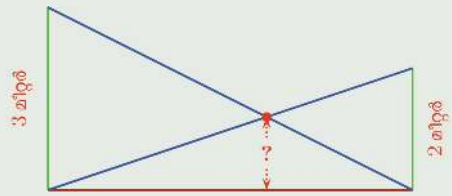


i) സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

ii) വശങ്ങളുടെ നീളം 3, 4, 5 സെന്റിമീറ്ററായ മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

Min = 0 ആകത്തക്കവിധം a, b എന്നീ പേരുകളിൽ രണ്ട് സ്ലൈഡറുകൾ നിർമിക്കുക. AB എന്ന ഒരു വര വരച്ച് അഗ്രബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി വരയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക. A, B ഇവ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി, ആരങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b ആയ വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തങ്ങൾ ലംബങ്ങളുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ C, D അടയാളപ്പെടുത്തുക. CB, AD എന്നീ വരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. E യിലൂടെ AB യ്ക്ക് ലംബം വരച്ച് AB യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. ലംബവരകളും വൃത്തങ്ങളും മറച്ചു വച്ചതിനുശേഷം AC, FE, BD എന്നീ വരകൾ വരച്ച് നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. AC = 3 ഉം BD = 2 ഉം ആകുമ്പോൾ EF എത്രയാണ്? AB യുടെ നീളം മാറ്റി നോക്കൂ. a, b ഇവ മാറ്റി നോക്കൂ.

(5) 3 മീറ്ററും 2 മീറ്ററും ഉയരമുള്ള രണ്ടു കമ്പുകൾ കുത്തനെ നിലത്തു നാട്ടി. ഓരോ കമ്പിന്റെയും മുകളറ്റത്ത് നിന്ന് മറ്റെ കമ്പിന്റെ ചുവട്ടിലേക്ക് കയർ വലിച്ചു കെട്ടിയിരിക്കുന്നു.



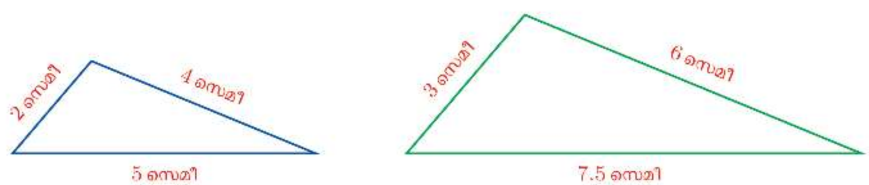
i) കയറുകൾ പരസ്പരം മുറിച്ചുകടക്കുന്നത്, നിലത്തുനിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലാണ്?

ii) കമ്പുകളുടെ നീളം a, b എന്നും, കയറുകൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന സ്ഥാനത്തിന്റെ ഉയരം h എന്നുമെടുത്ത് a, b, h ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

iii) കമ്പുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയായാലും ഈ ഉയരം മാറുന്നില്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

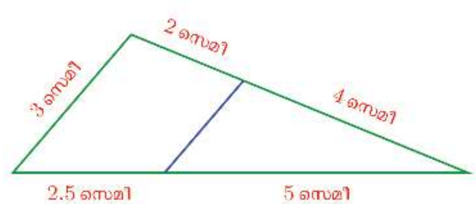
വശങ്ങളും കോണുകളും

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യമുണ്ട്: ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ ചെറുതാക്കുകയോ വലുതാക്കുകയോ ചെയ്താൽ കോണുകൾ മാറാതിരിക്കുമോ?

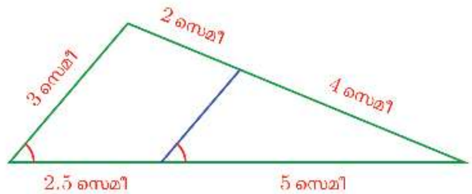


ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം ഒന്നര മടങ്ങാണ് വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണോ?

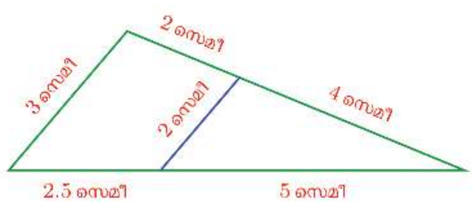
ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ വലിയ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി, ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കാം:



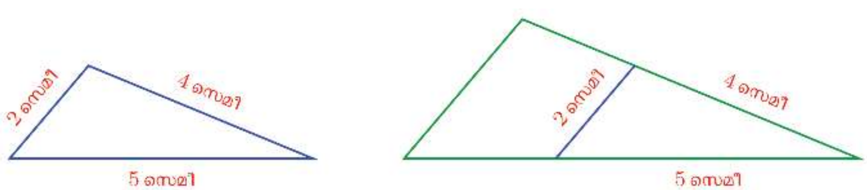
ഈ വര, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തെയും വലതുവശത്തെയും (1 : 2 എന്ന) ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽത്തന്നെയാണല്ലോ ഭാഗിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ഈ വര ഇടതുവശത്തിനു സമാന്തരമാണ് (**സമാന്തരവരകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണഭാഗം**). അതുകൊണ്ട് ഇവ രണ്ടും താഴത്തെ വശവുമായി ഒരേ ചരിവിലാണ്.



അപ്പോൾ വലിയ ത്രികോണവും അതിനുള്ളിലെ കൊച്ചു ത്രികോണവും മാത്രം നോക്കിയാൽ (പുറത്തുള്ള ചെറിയ ത്രികോണം തൽക്കാലം നോക്കണ്ട) അവ രണ്ടിനും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു കാണാം. നേരത്തെ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച്, ഈ രണ്ടു ത്രികോണത്തിലെയും വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നത്. ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ വശം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ്; രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വലതുവശങ്ങളും അങ്ങനെതന്നെ. മൂന്നു വശങ്ങളും മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലായതിനാൽ, ഇടതു വശങ്ങളും ഇതുപോലെ ആയിരിക്കണം. അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാംവശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കാമല്ലോ.



ഇനി വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പുറത്ത് മാറ്റി നിർത്തിയിരിക്കുന്ന ചെറുത്രികോണത്തെ വീണ്ടും നോക്കാം:



അകത്തും പുറത്തുമുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്. അതിനാൽ അവയ്ക്ക് ഒരേ കോണുകളാണ് (എട്ടാംക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വശങ്ങളും കോണുകളും** എന്ന ഭാഗം).

വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾതന്നെയാണെന്നു നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ.

അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

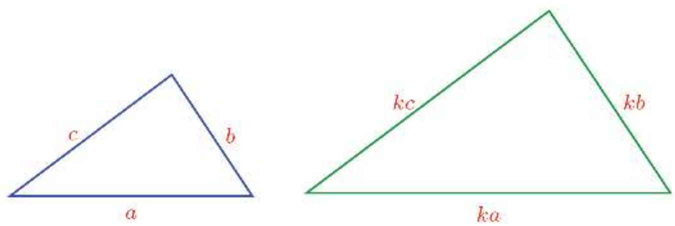
ആദ്യം വരച്ച ചെറിയ ത്രികോണത്തിനും വലിയ ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണ്.

ഈ ഉദാഹരണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ നീളവും മാറ്റത്തിന്റെ തോതുമെല്ലാം മാറ്റിയാലും ഇതേ വാദങ്ങൾകൊണ്ടുതന്നെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു സമർഥിക്കാം.

കൂടുതൽ കൃത്യത വേണമെന്നു തോന്നുന്നവർക്ക്, ഇതുതന്നെ പൊതുവായി അൽപം ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചു ചെയ്യാം.

ഒരു ത്രികോണവും, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം ഒരേ തോതിൽ മാറ്റിയ മറ്റൊരു ത്രികോണവുമെടുക്കുക. അതായത്, ഒരു ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളങ്ങളെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് മറ്റേ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ.

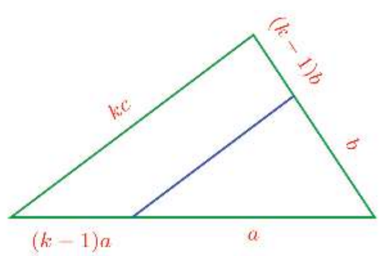
അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ a, b, c വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ ka, kb, kc എന്നുമെടുക്കാം:



ത്രികോണം ABC വരയ്ക്കുക (വശങ്ങൾ a, b, c എന്ന പേരിലാവാം). Min = 0 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ k നിർമിക്കുക. ka നീളത്തിൽ ഒരു വര DE വരച്ച് അഗ്രബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കിക്കൊണ്ട് ആരം kb, kc ആകത്തക്കവിധം വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണം DEF വരയ്ക്കുക. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവ തുല്യമല്ലേ? സ്ലൈഡറിന്റെ വിലയും ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളും മാറ്റി നോക്കൂ.

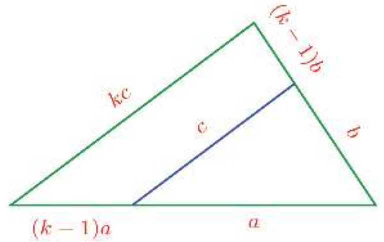
രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും ചുറ്റളവും പരപ്പളവും അടയാളപ്പെടുത്തുക ചുറ്റളവ് മാറുന്ന തോത് എന്താണ്? പരപ്പളവ് മാറുന്ന തോതോ?

ഉദാഹരണത്തിൽ ചെയ്തപോലെ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടുവശങ്ങളുടെ നീളം, വലിയ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി, ആ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുക.

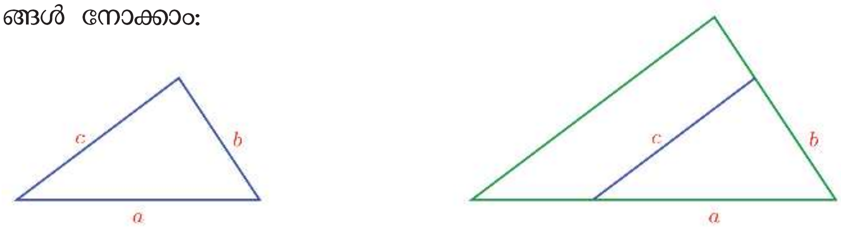


ഈ വര വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തെയും വലതുവശത്തെയും $k - 1 : 1$ എന്ന ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്; അതിനാൽ ഈ വര, ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തിനു സമാന്തരമാണ്. അപ്പോൾ വലിയ ത്രികോണത്തിനും, അതിനുള്ളിലെ കൊച്ചു ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു കാണാം. കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഇവ രണ്ടിന്റെയും വശങ്ങളുടെ മാറ്റവും ഒരേ തോതിലാണ്. വലിയ ത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ $\frac{1}{k}$ ഭാഗമാണ് അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ ത്രികോണ

ത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം. വലതു വശങ്ങളും ഇതുപോലതന്നെ. അപ്പോൾ ഇടതുവശങ്ങളും ഇങ്ങനെതന്നെയാകണം.



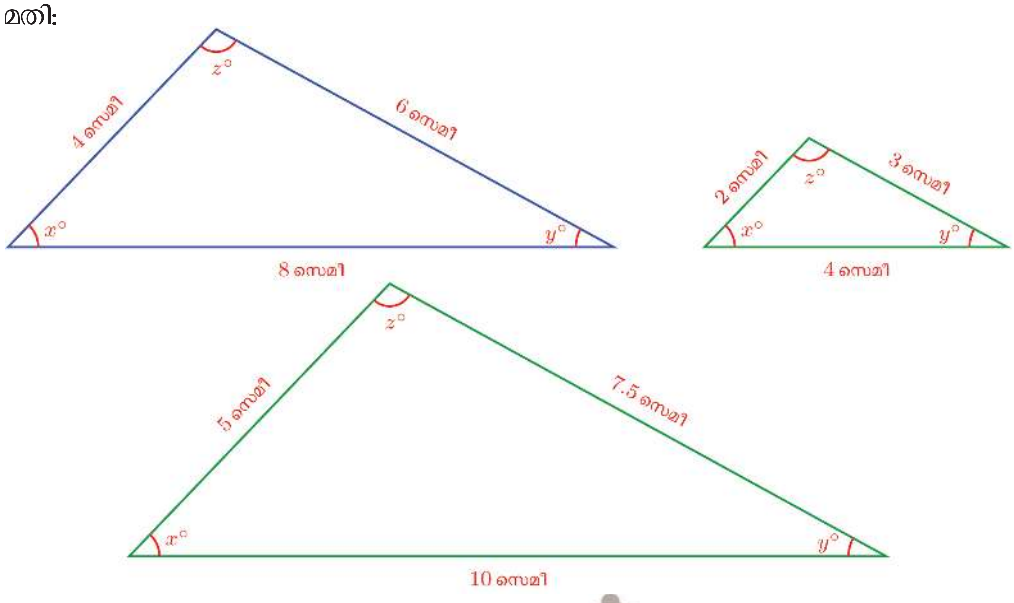
ഇനി ഉദാഹരണത്തിലെപ്പോലെ, പുറത്തും അകത്തുമുള്ള ചെറുത്രികോണങ്ങൾ നോക്കാം:



ഈ രണ്ടു ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമായതിനാൽ, കോണുകളും തുല്യമാണ്. അകത്തെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളും, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളും തുല്യമാണെന്നു നേരത്തെ കണ്ടു. അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിനും, വലിയ ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണ്.

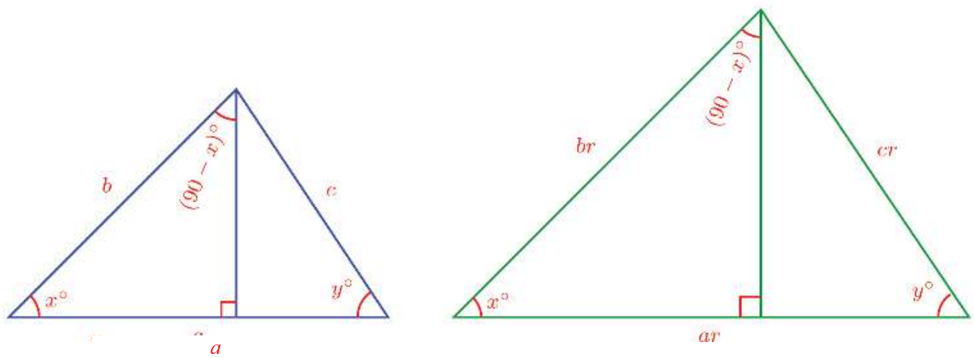
രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളത്തിന്റെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണെങ്കിൽ, അവയ്ക്കു ഒരേ കോണുകളാണ്.

അപ്പോൾ കോണുകൾ മാറാതെ ഒരു ത്രികോണം ചെറുതോ വലുതോ ആക്കി മാറ്റാൻ, കോണുകൾ അളക്കണമെന്നില്ല; വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ മാറ്റിയാൽ മതി:

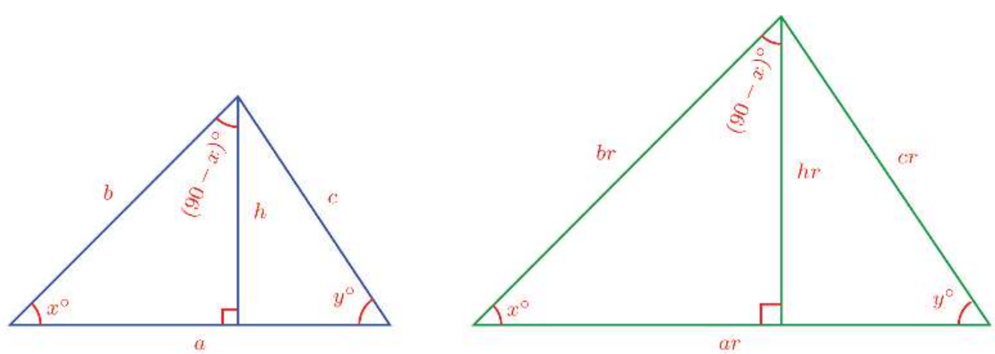


ഇതുപയോഗിച്ചുള്ള ഒരു കണക്കു നോക്കാം: ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരേ തോതിൽ വലുതാക്കുകയോ ചെറുതാക്കുകയോ ചെയ്താൽ, ചുറ്റളവുകളും അതേ തോതിലാണ് മാറുന്നതെന്ന് കാണാൻ വിഷമമില്ല. (ചെയ്തുനോക്കൂ!) പരപ്പളവുകളും ഇതേ തോതിലാണോ മാറുന്നത്?

പരപ്പളവുകൾ മാറുന്നത് എങ്ങനെയാണെന്നറിയാൻ, ഇങ്ങനെയുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കാം. ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, രണ്ടിനും ഒരേ കോണുകളാണ്. പരപ്പളവ് ഒത്തുനോക്കാൻ, ഒരേ കോണുള്ള മൂലകളിൽ നിന്നുള്ള ലംബങ്ങളും വരയ്ക്കാം:



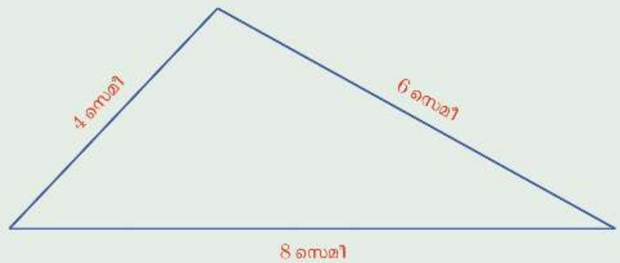
രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും ഇടതുഭാഗത്തുള്ള മട്ടത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം നോക്കുക: രണ്ടിലും കോണുകൾ x°, 90°, $(90 - x)^\circ$ തന്നെയാണ്; ഒരേ കോണുകളായതിനാൽ, വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണ്. നീല മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം b യും, പച്ച മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം br ഉം ആണ്. അപ്പോൾ നീല ത്രികോണത്തിലെ ലംബം h എന്നെടുത്താൽ പച്ച ത്രികോണത്തിലെ ലംബം hr ആണ്.



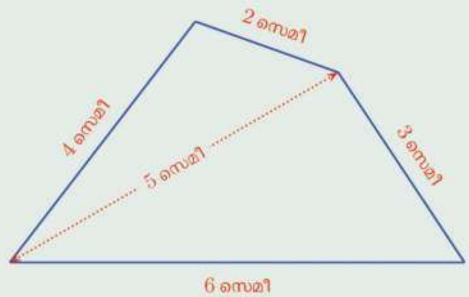
ഇനി മുഴുവൻ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമല്ലോ. നീല ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}ah$; പച്ചത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}ahr^2$

അപ്പോൾ പരപ്പളവ് മാറുന്ന തോത്, വശങ്ങൾ മാറുന്ന തോതിന്റെ വർഗമാണ്.

(1) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ അതേ കോണുകളും, വശങ്ങളുടെ നീളം $1\frac{1}{4}$ മടങ്ങുമായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.



(2) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ചിത്രം നോക്കൂ.



i) ഇതേ കോണുകളും, വശങ്ങളുടെ നീളമെല്ലാം $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങുമായ ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക.

ii) കോണുകൾ വ്യത്യസ്തവും, വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം ഇതിലെ വശങ്ങളുടെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങുമായ ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക.

ത്രികോണവിശേഷം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ, മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾക്കു തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഇവയുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തുല്യമാണ്; മറിച്ച് രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഒന്നിന്റെ കോണുകൾ തന്നെയാണ് രണ്ടാമത്തേതിന്റെയും. ഇത് ബഹുഭുജങ്ങളിൽ ത്രികോണങ്ങൾക്ക് മാത്രമുള്ള സവിശേഷതയാണ്.

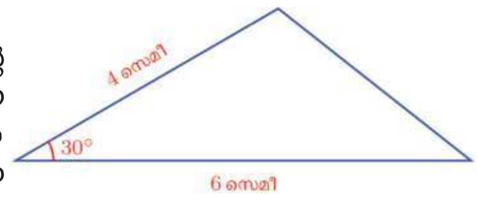
മൂന്നാംവഴി

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തെ കോണുകളും അറിയാമെങ്കിൽ കോണുകൾ മാറാതെ, വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ ചെറുതോ വലുതോ ആക്കി, മാറ്റി വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് ആദ്യഭാഗത്ത് കണ്ടു: അറിയാവുന്ന വശം വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റിവരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തും അതേ കോണുകൾ വരച്ചാൽ മതി; മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളും അതേ തോതിൽ മാറിക്കൊള്ളും.

മൂന്നു വശങ്ങളുമാണ് അറിയാവുന്നതെങ്കിൽ ഇത്തരത്തിൽ മാറ്റിവരയ്ക്കുന്ന രീതി രണ്ടാം ഭാഗത്തിലും കണ്ടു: എല്ലാ വശങ്ങളും വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റി

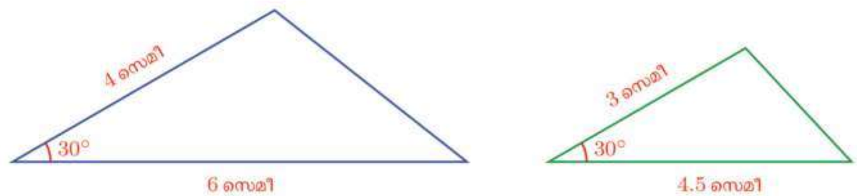
വരച്ചാൽ മതി; കോണുകൾ ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റേതുതന്നെയായിരിക്കും.

ഇനി മാറ്റേണ്ട ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും, അവ ചേരുന്ന കോണുമാണ് അറിയാവുന്നതെങ്കിലോ? ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കുക.



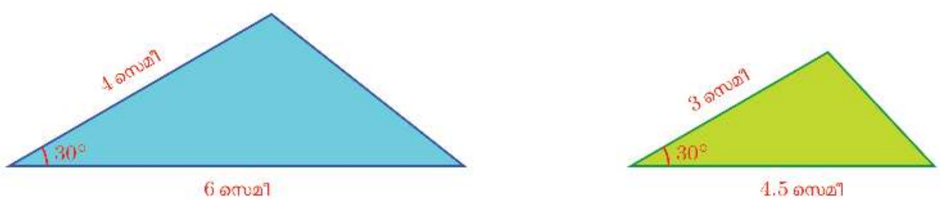
കോണുകൾ മാറാതെ ഇതിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കണം.

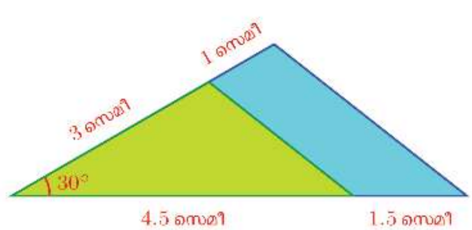
വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും, 4 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും $\frac{3}{4}$ ഭാഗവും അവ ചേരുന്ന കോൺ 30° യുമായി ത്രികോണം വരയ്ക്കാം.



പക്ഷേ ഈ ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാംവശവും ആദ്യത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാംവശത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാണെന്ന് അറിയില്ലല്ലോ.

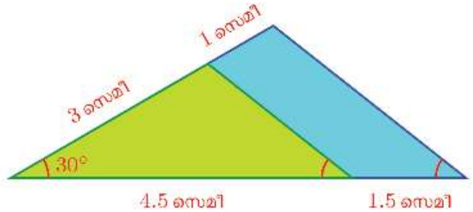
ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, പാഠത്തിന്റെ ആദ്യഭാഗത്തു ചെയ്തതുപോലെ ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ കട്ടിക്കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത്, ഇടതുമൂലകൾ ചേർത്തു വയ്ക്കുക. കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഈ മൂലയിലെ വശങ്ങളും ചേർന്നിരിക്കും.





ഇപ്പോൾ പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശം, നീല ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തെയും താഴത്തെ വശത്തെയും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ഈ വര, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശത്തിനു

സമാന്തരമാണ്. അതുകൊണ്ട് രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വലതു വശങ്ങൾ താഴത്തെ വശവുമായി ഒരേ ചരിവിലാണ്.

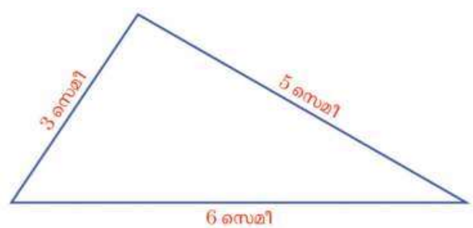


അങ്ങനെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു കാണാം. അപ്പോൾ ഇവയുടെ വശങ്ങൾ മൂന്നും മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ്. അങ്ങനെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു വശം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗം തന്നെയാണെന്നും കാണാം.

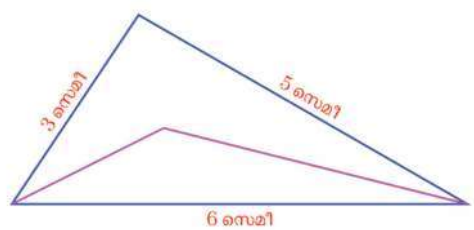
ഇതിൽ അളവുകളും തോതുമെല്ലാം മാറിയാലും, ഇതേ രീതിയിൽത്തന്നെ മേൽപ്പറഞ്ഞ നിഗമനത്തിലെത്താമല്ലോ.

രണ്ടു വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലും, അവ ചേരുന്നത് ഒരേ കോണിലുമായ ത്രികോണങ്ങളിൽ മൂന്നാം വശങ്ങളിലെ മാറ്റവും ഇതേ തോതിലാണ്.

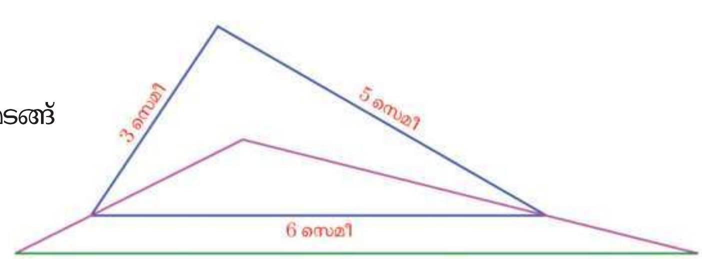
ഈ തത്വമുപയോഗിച്ച്, വശങ്ങളോ കോണുകളോ അളക്കാതെതന്നെ ഒരു ത്രികോണത്തിനെ വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റി വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക;



ത്രികോണത്തിനുള്ളിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി, താഴത്തെ വശത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിക്കുക:

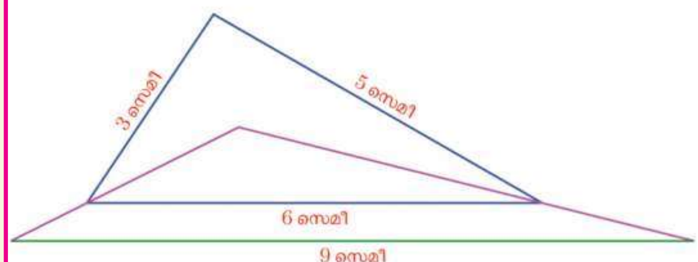


ഈ വരകളോരോന്നും, അവയുടെ ഒന്നര മടങ്ങ് നീട്ടി, അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുക:

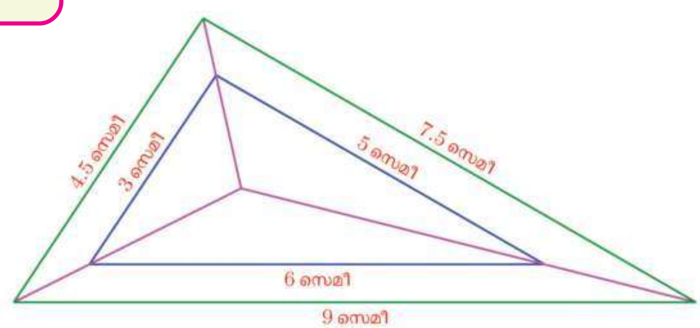


ജിയോജിബ്രയിൽ ത്രികോണങ്ങളുടെ തോത് മാറ്റി വരയ്ക്കാൻ ഒരു വഴിയുണ്ട്. ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. D എന്ന ഒരു ബിന്ദു ത്രികോണത്തിനകത്തോ പുറത്തോ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Ray ഉപയോഗിച്ച് D യിൽനിന്നും ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലേക്ക് വരകൾ വരയ്ക്കുക. Min = 0 ആകത്തക്ക വിധം ഒരു സ്ലൈഡർ g നിർമിക്കുക. D കേന്ദ്രമായി ആരം g ∗ AD വരത്തക്കവിധം ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അത് AD യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. അതുപോലെ D കേന്ദ്രമായി ആരം g ∗ BD ആയി വൃത്തം വരച്ച് BD യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F ഉം, ആരം g ∗ CD വരുന്ന വൃത്തം വരച്ച് CD യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു G യും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇനി വൃത്തങ്ങൾ മറച്ചുവയ്ക്കാം. EFG എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. രണ്ട് ത്രികോണത്തിന്റേയും വശങ്ങളും കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ. g = 1 ആകുമ്പോൾ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? g ആയി 0.5, 2 എന്നിങ്ങനെ എടുക്കുമ്പോഴോ? D യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

ഇപ്പോൾ പുതിയൊരു ത്രികോണവും അതിനുള്ളിലൊരു ചെറുത്രികോണവുമായി. വരച്ചതിന്റെ കണക്കനുസരിച്ച്, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും ഭാഗങ്ങളുടെ ഒന്നര മടങ്ങാണ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും ഭാഗങ്ങൾ; ഈ വശങ്ങൾ ചേരുന്നത് രണ്ടു ത്രികോണത്തിലും ഒരേ കോണായതിനാൽ, വലിയ ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ വശവും, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാംവശത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങാണ്.



ത്രികോണത്തിനകത്തെ ബിന്ദു, മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുമായി ഇതേപോലെ യോജിപ്പിച്ചു നീട്ടിയാലോ?



വശങ്ങളെല്ലാം ഒന്നര മടങ്ങായില്ലേ? വശങ്ങളുടെ നീളമറിയില്ലെങ്കിലും ഇങ്ങനെ മാറ്റിവരയ്ക്കാം.

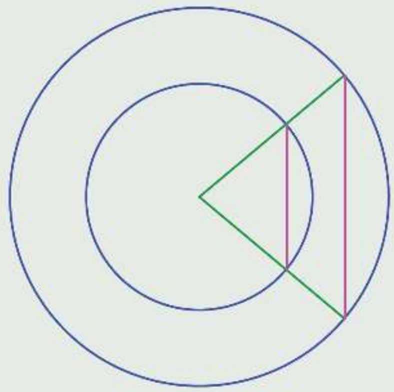
വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലായ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശം (similar) ആണെന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇതുവരെ കണ്ട തത്വങ്ങളനുസരിച്ച് ഇങ്ങനെ പറയാം,

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാകാൻ, ചുവടെപ്പറയുന്ന ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ ബന്ധമുണ്ടായാൽ മതി.

- ഒരേ കോണുകളാകുക
- വശങ്ങളിലെയെല്ലാം മാറ്റം ഒരേ തോതിലാകുക.
- രണ്ടു വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാകുകയും, അവ ഒരേ കോണിൽ ചേരുകയും ചെയ്യുക.

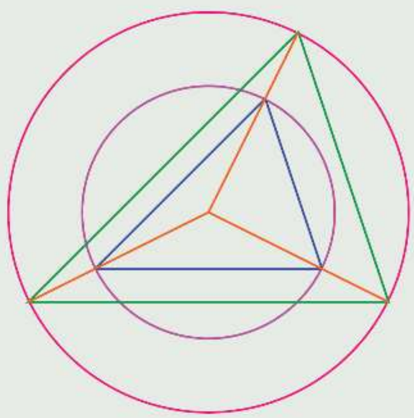
സദൃശത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ Dilate from Point ഉപയോഗിക്കാം. Min = 0 വരത്തക്ക വിധം സ്ലൈഡർ a ഉണ്ടാക്കുക. ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന് അകത്തോ പുറത്തോ ആയി ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Dilate from Point ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിലും തുടർന്ന് ബിന്ദുവിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ Scale Factor ആയി a എന്ന് നൽകുക. ത്രികോണത്തിന് സദൃശമായി മറ്റൊരു ത്രികോണം കിട്ടും. a യും ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനവും മാറ്റി നോക്കൂ. ത്രികോണത്തിന് പകരം ഏത് രൂപത്തിന്റെയും സദൃശരൂപങ്ങൾ ഇതുപോലെ നിർമിക്കാം.

(1) ചിത്രത്തിലെ രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾക്കും ഒരേ കേന്ദ്രമാണ്. വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ട് ആരങ്ങളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ആരങ്ങൾ ചെറിയ വൃത്തത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളും യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഇങ്ങനെയുണ്ടായ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ പരിവൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ വരകൾ നീട്ടി, അതേ കേന്ദ്രമായ മറ്റൊരു വൃത്തത്തിൽ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ത്രികോണംകൂടി ഉണ്ടാക്കുന്നു.



i) ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

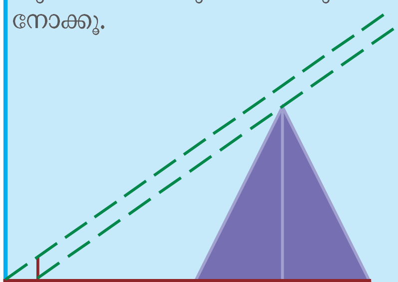
ii) ത്രികോണങ്ങളിലെ വശങ്ങൾ മാറിയ തോത്, വൃത്തങ്ങളുടെ ആരങ്ങൾ മാറിയ തോതു തന്നെയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

വളരെപ്പഴയ നിഴൽക്കണക്ക്

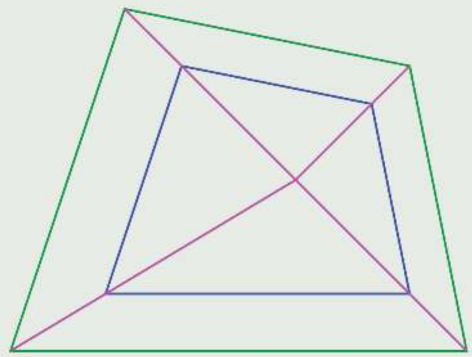
ഗ്രീസിലെ ഗണിതജ്ഞനായ ഥേലീസ്, ത്രികോണങ്ങളുടെ തുല്യത എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച്, കടലിൽക്കിടക്കുന്ന കപ്പലിലേക്കുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കിയ കഥ കേട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ?

ഥേലീസിനെക്കുറിച്ചുതന്നെ മറ്റൊരു കഥയുണ്ട്. ഈജിപ്റ്റിലെ രാജാവ്, ഒരു പിരമിഡിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കാൻ ഥേലീസിനോട് ആവശ്യപ്പെട്ടുവത്രേ. ഥേലീസിന്റെ മാർഗം ഇങ്ങനെയാണ് രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നത്. "പിരമിഡിന്റെ നിഴലിന്റെ അറ്റത്ത്, സ്വന്തം വടി കുത്തിനിർത്തി, സൂര്യരശ്മികളുണ്ടാക്കിയ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ, നിഴലുകളുടെ അംശബന്ധം, പിരമിഡിന്റേയും വടിയുടേയും അംശബന്ധത്തിനു തുല്യമാണെന്ന് കാണിച്ചു."

ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം നോക്കൂ.



(3) ഒരു ചതുർഭുജത്തിനകത്തെ ഒരു ബിന്ദുവും ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ, ഒരേ തോതിൽ പുറത്തേക്കു നീട്ടുന്നു; ഈ വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു ചതുർഭുജമുണ്ടാക്കുന്നു.



i) വലിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾ, ചെറിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളെ ഒരേ തോതിൽ വലുതാക്കിയതാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) രണ്ടു ചതുർഭുജങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ABCD എന്ന ചതുർഭുജം വരച്ച് അതിനകത്ത് E എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Min = 0 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ k നിർമിക്കുക. Ray Tool ഉപയോഗിച്ച് E യിൽനിന്ന്, A യിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വര വരയ്ക്കുക. E കേന്ദ്രമായി ആരം k*EA എന്ന് നൽകി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇതുപോലെ EB, EC, ED എന്നീ വരകൾ നീട്ടി വരച്ച് ആരം k*EB, k*EC, k*ED ആയ വൃത്തങ്ങൾ വരച്ച് വരകളുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ G, H, I ഇവ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ചതുർഭുജം FGHI വരയ്ക്കുക. രണ്ട് ചതുർഭുജങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തി അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണക്കാക്കുക. ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ആദ്യത്തെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളും സ്ലൈഡറിന്റെ വിലയും മാറ്റി മാറ്റി നോക്കൂ.

ഗവേഷണം

സദൃശ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോൺസമഭാജികൾ, നടുവരകൾ, പരിവൃത്ത ആരങ്ങൾ എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്?